Examen de Matemáticas II (Extraordinaria 2023) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2,5 puntos)
Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de A^tA.

b) (0,5 puntos) Calcular el rango de BA en función de b.

c) (0,75 puntos) Calcular B^{-1} para $b = 2$.

d) (0,75 puntos) Para $b = 1$, calcular B^5.

Problema 2 (2,5 puntos) Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora, es

$$c(v) = \begin{cases} \dfrac{5v}{3} & \text{si} \quad 0 \le v < 3 \\ 14 - 4v + \dfrac{v^2}{3} & \text{si} \quad v \ge 3 \end{cases}$$

a) (1 punto) Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?

b) (1,5 puntos) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1 \le v \le 8$, ¿cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

Problema 3 (2,5 puntos) Sean el plano $\pi : z = 1$, los puntos $P(1, 1, 1)$ y $Q(0, 0, 1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q.

a) (0,25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.

b) (1 punto) Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.

c) (1,25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r, con la cual forme un ángulo $\dfrac{\pi}{4}$ radianes.

Problema 4 (2,5 puntos) Sabiendo que $P(A) = 0,5$, $P(A|B) = 0,625$ y $P(A \cup B) = 0,65$, se pide calcular:

a) (1,5 puntos) $P(B)$ y $P(A \cap B)$.

b) (1 punto) $P(A|A \cup B)$ y $P(A \cap B|A \cup B)$.

Examen de Matemáticas II (Extraordinaria 2023)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2,5 puntos) Dado el sistema $\begin{cases} -2x + y + kz = 1 \\ kx - y - z = 0 \\ -y + (k-1)z = 3 \end{cases}$, se pide:

a) (1,25 puntos) Discutirlo en función del parámetro k.

b) (0,5 puntos) Resolverlo para $k = 3$.

c) (0,75 puntos) Resolverlo para $k = 3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x = 2$.

Problema 2 (2,5 puntos) Dadas las funciones

$$f(x) = 2 + 2x - 2x^2 \;\text{ y }\; g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3,$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$

b) (1,5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 2$.

Problema 3 (2,5 puntos) Dados el plano $\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 \end{cases}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.

b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π.

c) (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a r, que esté contenida en π, y que corte al eje OZ.

Problema 4 (2,5 puntos) El 65 % de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consigue a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

c) (1 punto) Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que, dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.