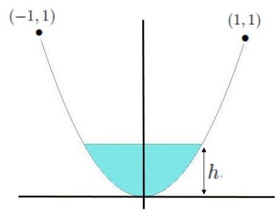
Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2023

Problema 1 Se tiene un abrevadero de longitud 6 m y de altura 1 m. Su sección es la descrita en la figura formada por la función $y = x^2$. Por h indicamos la altura del nivel del líquido.

a) Comprueba que el área de la región S, sombreada en la figura, en función de h se puede expresar como $S(h) = \dfrac{4h\sqrt{h}}{3}$.



b) Determina la altura h donde se alcanza la mitad del volumen total del abrevadero. (Nota: Volumen=$S\times$longitud).

Solución:

a) Los puntos de corte de la parábola y la recta $y = h$:

$$x^2 = h \Longrightarrow x = \pm\sqrt{h}$$

$$S(h) = \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} (h - x^2)\, dx = hx - \frac{x^3}{3}\Big]_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} = h\sqrt{h} - \frac{h\sqrt{h}}{3} + h\sqrt{h} - \frac{h\sqrt{h}}{3} =$$

$$\frac{2h\sqrt{h}}{3} + \frac{2h\sqrt{h}}{3} = \frac{4h\sqrt{h}}{3}$$

b) $V(h) = S(h) \times 6 = 8h\sqrt{h} \Longrightarrow V(1) = 8 \Longrightarrow V(h) = 4 \Longrightarrow 8h\sqrt{h} = 4 \Longrightarrow$ $h^{3/2} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow h^3 = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow h = \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} = 0,62996$ m.

Problema 2 Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

a) Halla los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y, si existen, los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión.

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Esboza una gráfica de la función.

c) Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) Dom$(f) = \mathbb{R}$.

- ☛ Puntos de corte:

- Con el eje de ordenadas hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0,0)$
- Con el eje de abscisas hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (0,0)$ y $(3,0)$

☛ Máximos y Mínimos:

$$f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 3$$

$$f''(x) = 6(x-2) \Longrightarrow \begin{cases} f''(1) = -6 < 0 \Longrightarrow \text{Máx}(1,4) \\ f''(3) = 6 > 0 \Longrightarrow \text{Mín}(3,0) \end{cases}$$

☛ Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 6(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 2, \;\; f'''(x) = 6 \Longrightarrow f'''(2) = 6 \neq 0 \Longrightarrow PI(2,2)$$

☛ En conclusión: hay dos puntos de corte en $(0,0)$, $(3,0)$, un máximo relativo en $(1,4)$, un mínimo relativo en $(3,0)$ y un punto de inflexión en $(2,2)$.

b) ☛ Monotonía:

	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

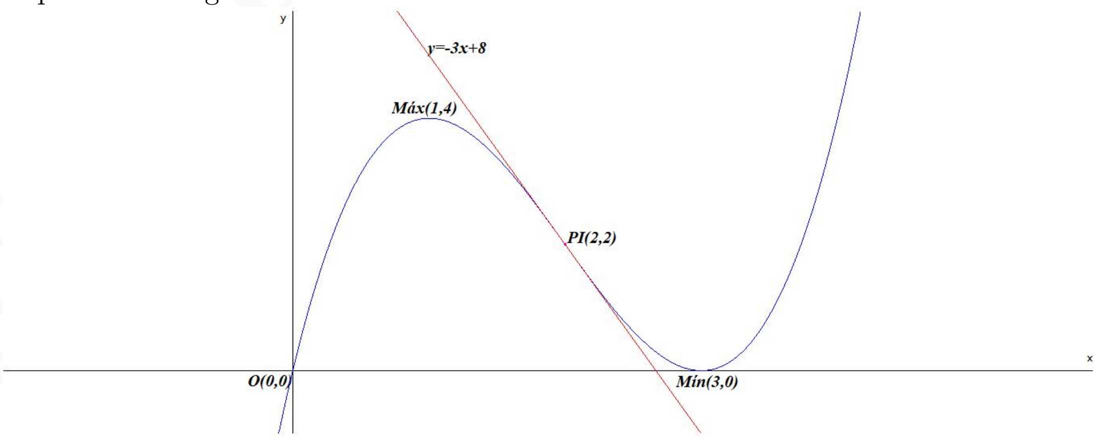
La función crece en el intervalo $(-\infty,1) \cup (3,\infty)$ y decrece en el intervalo $(1,3)$.

☛ Curvatura:

	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa ($\frown$) en el intervalo $(-\infty,2)$ y cóncava ($\smile$) en el intervalo $(2,\infty)$.

☛ Representación gráfica:



c) $b = f(2) = 2$ y $m = f'(2) = -3 \Longrightarrow y - 2 = -3(x-2) \Longrightarrow y = -3x + 8$

Problema 3 Sea la función $f(x) = 4 - x^2$

a) Su gráfica determina con el eje de abscisas un recinto limitado D. Calcula su área.

b) La gráfica de la función $g(x) = 3x^2$ divide D en tres partes D_1, D_2 y D_3. Haz un dibujo de los tres.

c) Calcula el área del recinto D_2 que contiene el punto $P(0, 1)$.

Solución:

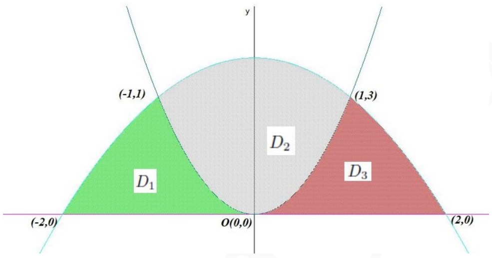
a) $4 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

$$S(D) = |A| = \frac{32}{3} \simeq 10,667\ u^2$$

b) Buscamos los puntos de corte entre las dos gráficas:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 4 - x^2 = 3x^2 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$$



c)

$$A = \int_{-1}^{1} (4 - x^2 - 3x^2)\, dx = \int_{-1}^{1} (4 - 4x^2)\, dx = 4x - \frac{4x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{16}{3}$$

$$S(D_2) = |A| = \frac{16}{3} \simeq 5,333\ u^2$$

Problema 4 Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\ \cos(\pi x) & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \\ \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

a) Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

b) Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \longrightarrow 0} \dfrac{xe^{-x}}{1+2x-\cos x^2}$

Solución:

a) Las tres ramas son continuas en el dominio de la función, estudiamos en $x=2$ y en $x=3$.

♣ Continuidad en $x=2$:

$$\begin{cases} \lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} \dfrac{3}{x-2} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} \cos(\pi x) = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

En este caso los límites laterales no coinciden y la función es discontinua no evitable (hay un salto)

♣ Continuidad en $x=3$:

$$\begin{cases} \lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^-} \cos(\pi x) = -1 \\ \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^+} \ln(x-2)3 - x = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 3^+} 1/(x-2)-1 = -1 \\ f(3) = -1 \end{cases} \Longrightarrow$$

En este caso los límites laterales coinciden y con el valor de la función en $x=3 \Longrightarrow$ la función es continua.

♣ En conclusión f es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

b) $\lim_{x \longrightarrow 0} \dfrac{xe^{-x}}{1+2x-\cos x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^{-x} - xe^{-x}}{2+2x\sin x^2} = \dfrac{1}{2}$