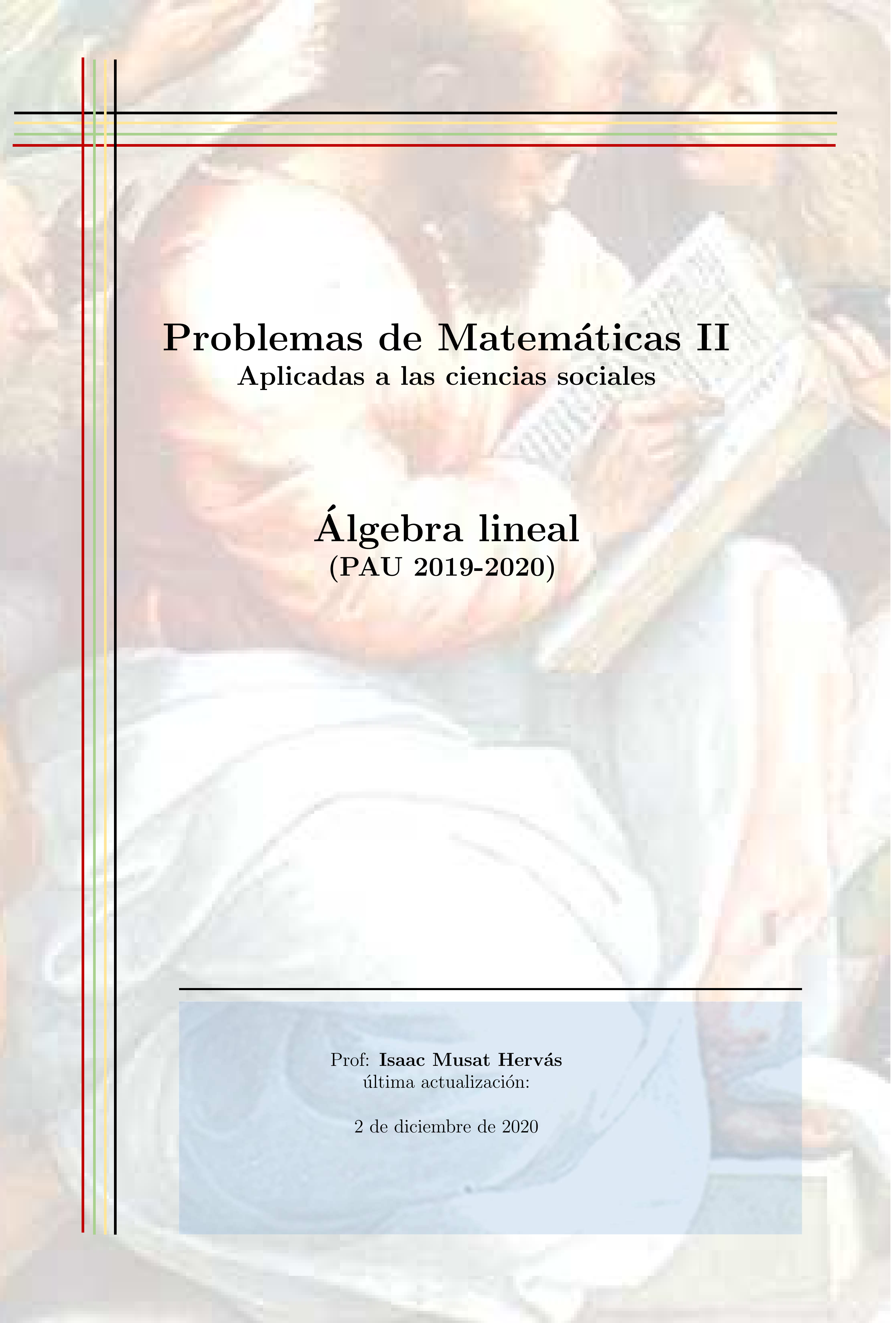

Problemas de Matemáticas II

Aplicadas a las ciencias sociales

Álgebra lineal

(PAU 2019-2020)

Prof: **Isaac Musat Hervás**

última actualización:

2 de diciembre de 2020

Índice general

Teoría

0.1. Resúmenes teóricos

Matrices

matriz A	dimensión	Transpuesta A^T	dimensión
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$	$n \times m$
matriz cuadrada	orden	identidad	matriz triangular
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	n	$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- **Suma:** Tienen que tener la misma dimensión y se suman término a término.
- **Producto de una matriz por un número real:** Se multiplican todos los términos de la matriz por ese número.
- **Producto de dos matrices:** Se desarrolla multiplicando matriz fila por matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

El número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

Determinante de una matriz

- La matriz tiene que ser cuadrada

  a) De orden dos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

  b) De orden tres: (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

- Propiedades:

  a) $\begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

  b) $|A^T| = |A|$

c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

d) Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

e) Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.

f) Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.

g) Si dos filas o dos columnas son proporcionales el determinante vale cero.

h) Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

Matriz Adjunta:

- Adjunto del elemento a_{ij} de una matriz es el valor del determinante resultante de eliminar la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$ y se le denomina A_{ij}.

- Matriz adjunta. $Adj(A) = (A_{ij})$

Cálculo del determinate de una matriz por adjuntos:
Se elige una fila o una columna (cualquiera es válida, siempre será mejor aquella que tenga más ceros), escojo la primera fila para el ejemplo:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

Una matriz tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.
A las matrices que tienen inversa se la llama **Regulares** y a las que no la tienen se las llama **Singulares**.
Rango de una matriz
Es el número de filas linealmente independientes.
De forma práctica se calcula por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión 3×4 cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3, si el determinate de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado, si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden 2. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango será 2, si por el contrario todos son cero tendremos que buscar menores de orden 1, y en el momento que encontremos alguno distinto de cero el rango será 1.

Sistema de Ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \quad = & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{array}\right.$$

Matriz del sistema: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Matriz de variables: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$,

Matriz de términos independientes: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Se trata de una ecuación matricial: $AX = B$.
Si $|A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ y en este caso el sistema se podrá resolver de la siguiente manera $X = A^{-1}B$

Antes de resolver un sistema estudiar si hay ecuaciones nulas, iguales o proporcionales, para el estudio del rango.

Teorema de Rouché

- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) = nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD). Y tiene solución única.
- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) $<$ nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI). Y tiene infinitas soluciones.
- Si Rango($\overline{A}$) $\neq$Rango(A) se trata de un Sistema Incompatible. Y no tiene solución.

Sistema homogéneos Son aquellos en los que $b_i = 0$, estos siempre tienen solución $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial, pero en el caso de que de que Rango(A) $< m$ (nº de incógnitas) estaríamos ante infinitas soluciones, es decir:

- Si Rango(A) $= m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCD $\Longrightarrow$ $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial.
- Si Rango(A) $< m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCI $\Longrightarrow$ infinitas soluciones.

Regla de Cramer
Sea $\overline{A} = (C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, B)$, entoces sustituimos la columna B en la matriz $\overline{A}$ por cada una de las columnas y tendremos:

$$x_1 = \frac{|B, C_2, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \;\; x_2 = \frac{|C_1, B, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|C_1, C_2, \cdots, B|}{|A|}$$

Problemas

0.2. Andalucia

0.2.1. Modelo de 2020

Problema 0.2.1 Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Razone si la matriz, A es simétrica.

b) Calcule A^{-1}.

c) Resuelva la ecuación matricial $2XA - A^2 - 3I_3 = O$.

Solución:

a) $A^T \neq A \Longrightarrow A$ no es simétrica.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $2XA - A^2 - 3I_3 = O \Longrightarrow 2XA = A^2 + 3I_3 \Longrightarrow X = \frac{1}{2}(A^2 + 3I_3)A^{-1} = \frac{1}{2}(A + 3A^{-1})$

$$X = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -1/2 & -2 \\ 3 & 2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

0.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.2.2 Sean A, B, X e Y matrices invertibles que verifican $AX = B$ y $BY = A$.

a) Compruebe que $Y^{-1} = X$.

b) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ halle X e Y.

Solución:

a) $BY = A$ y $AX = B \Longrightarrow AXY = A \Longrightarrow A^{-1}AXY = A^{-1}A \Longrightarrow XY = I \Longrightarrow XYY^{-1} = I \cdot Y^{-1} \Longrightarrow X = Y^{-1}$

b) $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$BY = A \Longrightarrow Y = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

0.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.2.3 Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según el tipo de habitación individual, doble y triple. La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros. El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples, el segundo dos individuales, doce dobles y cinco triples y el tercer instituto una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) Exprese, mediante una matriz A, los precios de las dos agencias según tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.

b) Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesaría a cada instituto?

c) ¿Existe la inversa de la matriz D? ¿Y de la matriz A? Justifique las respuestas.

Solución:

a)

	Individual	Doble	Triple
Agencia 1	65	85	104
Agencia 2	78	83	106

$$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix}$$

	Instituto 1	Instituto 2	Instituto 3
Individual	3	2	1
Doble	15	12	16
Triple	2	5	7

$$\Longrightarrow D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

b) $$A \cdot D = \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1678 & 1670 & 2153 \\ 1691 & 1682 & 2148 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

	Instituto 1	Instituto 2	Instituto 3
Agencia 1	1678	1670	2153
Agencia 2	1691	1682	2148

Al Instituto 1 y al Instituto 2 les interesaría contratar con la Agencia 1, mientras que al Instituto 3 le interesaría la Agencia 2.

c) La matriz A no es cuadrada y, por tanto, no tiene inversa.
$|D| = -83 \Longrightarrow \exists D^{-1}$ (Si existe inversa de D)

0.3. Aragón

0.3.1. Modelo de 2020

Problema 0.3.1 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de x e y se tiene $AB = C$?

b) Calcular, si existe, la matriz inversa de C.

Solución:

a) $AB = C \Longrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2x - 2y - 1 & x - 4y \\ -9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x - 2y - 1 = 2 \\ x - 4y = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -9/5 \\ y = 3/10 \end{array} \right.$$

b) $|C| = -19 \neq 0 \Longrightarrow \exists C^{-1} = \begin{pmatrix} -4/19 & -3/19 \\ -9/19 & -2/19 \end{pmatrix}$

0.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.3.2 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Es posible calcular $(BA)^2$? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

b) Encontrar, si existe, una matriz X, que verifique $2X + 3B = 2C$.

c) Calcular, si existe, la matriz inversa de D.

Solución:

a) $\underset{3\times 2}{B} \cdot \underset{2\times 3}{A} = \underset{3\times 3}{BA} \Longrightarrow \exists (BA)$ con $\dim(BA) = 3 \times 3 \Longrightarrow$ se puede calcular $(BA)^2$:

$$(BA)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 12 \\ 0 & 9 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $2X + 3B = 2C \Longrightarrow X = \dfrac{1}{2}(2C - 3B)$:

$$X = \frac{1}{2}\left[2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 7 & 8 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 7/2 & 4 \\ 5/2 & 9/2 \end{pmatrix}$$

c) $|D| = 4 \neq 0 \Longrightarrow \exists D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & -1/4 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

0.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.3.3 En un museo las entradas cuestan 1 euro para los niños, 2 euros para los jóvenes y 5 euros para los adultos. Ayer se recaudaron un total de 600 euros y se sabe que el número de adultos que visitó el museo fue igual al doble de la suma del número de niños más el número de jóvenes; además, si hubiesen visitado el museo 100 jóvenes más, el número de jóvenes habría sido igual a la suma del número de niños más el número de adultos. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de niños, jóvenes y adultos que visitaron el museo.

Solución:
Sea x: nº de niños, y: nº de jóvenes y z: nº de adultos.

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+5z=600\\ z=2(x+y)\\ y+100=x+z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y+5z=600\\ 2x+2y-z=0\\ x-y+z=100 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=24\\ y=28\\ z=104 \end{array}\right.$$

0.4. Asturias

0.4.1. Modelo de 2020

Problema 0.4.1 Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} y & 1\\ x & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} m\\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } D=\begin{pmatrix} 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Si $A-B\cdot C=D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m=2$.

Solución:

a) $A-B\cdot C=D \Longrightarrow \begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix} y & 1\\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m\\ -1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 0\\ 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} my-1\\ mx-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix} x-my+1\\ -mx+y+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x-my=-1\\ -mx+y=-1 \end{array}\right.$

b) $\overline{M}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & -1\\ -m & 1 & -1 \end{array}\right)$, $|M|=1-m^2=0\Longrightarrow m=\pm 1$.

Si $m\neq\pm1\Longrightarrow |M|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(M)=2=$Rango$(\overline{M})=$ nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado y la solución es única.

Si $m=-1$: $\overline{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} F_1\\ F_2-F_1 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado y el sistema tendría infinitas soluciones.

Si $m=1$: $\overline{M}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} F_1\\ F_2+F_1 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\Longrightarrow$ el sistema es incompatible y el sistema no tendría solución.

Luego de existir solución puede no ser única.

Si $m=2$: $\left\{\begin{array}{l} x-2y=-1\\ -2x+y=-1 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=1 \end{array}\right.$

0.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.4.2 En una oficina se hicieron la semana pasada un total de 550 fotocopias entre fotocopias en blanco y negro y fotocopias en color. El coste total de dichas fotocopias fue de 3,5 euros, siendo el coste de cada fotocopia en blanco y negro de m céntimos de euro, y el coste de cada fotocopia en color cuatro veces el coste de una en blanco y negro.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de fotocopias en blanco y negro y en color hechas la semana pasada.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas fotocopias en blanco y negro se realizaron en la oficina si cada fotocopia en color costó 2 céntimos?

Solución: Sea x el nº de fotocopias en blanco y negro e y el nº de fotocopias en color.

a) $\begin{cases} x + y = 550 \\ mx + 4my = 350 \end{cases}$

b) $\overline{M} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 550 \\ m & 4m & 350 \end{array} \right)$, $|M| = 3m = 0 \Longrightarrow m = 0$.
Si $m \neq 0 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(M) = 2 =$Rango$(\overline{M})$ = nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado y la solución es única.
Si $m = 0$: $\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc} 10 & 1 & 550 \\ 0 & 0 & 350 \end{array} \right) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible y el sistema no tendría solución.

c) Si la fotocopia en color costó $2 = 4m \Longrightarrow m = 0,5$ $m = 2 \Longrightarrow \begin{cases} x + y = 550 \\ 0,5x + 2y = 350 \end{cases} \Longrightarrow$
$\begin{cases} x = 500 \\ y = 50 \end{cases}$

0.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.4.3 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ -2 & m \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ \text{y} \ D = \begin{pmatrix} 1-2m \\ -2m \end{pmatrix}$$

a) Si $(A+B)\cdot C = B \cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

Solución:

a) $(A+B)\cdot C = B \cdot D \Longrightarrow \left[\begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ -2 & m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2m \\ -2m \end{pmatrix}$
$\Longrightarrow \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4m \\ 1-2m \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} mx - y \\ -x + my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2m \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ -x + my = 1 - 2m \end{cases}$$

b) $\overline{M}=\left(\begin{array}{cc|c} m & -1 & 1\\ -1 & m & 1-2m\end{array}\right)$, $|M|=m^2-1=0\Longrightarrow m=\pm 1$.

Si $m\neq\pm 1\Longrightarrow |M|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(M)=2=$Rango$(\overline{M})=$ nº de incógnitas, el sistema es compatible determinado y la solución es única.

Si $m=1$: $\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado y el sistema tendría infinitas soluciones.

Si $m=-1$: $\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 3\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{array}\right)\Longrightarrow$ el sistema es incompatible y el sistema no tendría solución.

Luego de existir solución puede no ser única.

Si $m=2$: $\left\{\begin{array}{l} 2x-y=1\\ -x+2y=-3\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-1/3\\ y=-5/3\end{array}\right.$

0.5. Cantabria

0.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.5.1 Una tienda de electrodomésticos ha vendido 750 televisores de tres modelos diferentes, A, B y C. Los ingresos totales obtenidos han sido de 230400 euros. El precio de venta del modelo A era de 320 euros; el del modelo B, un 20 % más barato que A; y el del C, un 10 % más caro que A. Además, de A y C se han vendido, en total, el doble de unidades que B.

a) Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular cuántas unidades se han vendido de cada modelo de televisor.

b) Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

c) Resolverlo.

Solución:

a) Sean x el número de televisores modelo A, y el número de televisores modelo B y z el número de televisores modelo C.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=750\\ 320x+0,8\cdot 320y+1,1\cdot 320z=230400\\ x+z=2y\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x+y+z=750\\ 10x+8y+11z=7200\\ x-2y+z=0\end{array}\right.$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 750\\ 10 & 8 & 11 & 7200\\ 1 & -2 & 1 & 0\end{array}\right)$, $|A|=3\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

c)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=750\\ 10x+8y+11z=7200\\ x-2y+z=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=300\\ y=250\\ z=200\end{array}\right.$$

0.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.5.2 Una oficina necesita adquirir material de papelería. Cuenta con un presupuesto de 600 euros y necesita archivadores, cuadernos y carpetas. Los precios de cada artículo por unidad son de 6, 3 y 2 euros respectivamente. El número de cuadernos va a ser la cuarta parte que el de carpetas y el número total de archivadores y de carpetas será de 165.

a) Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.

b) Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

c) Resolverlo.

Solución:

a) Sean x el número de archivadores, y el número de cuadernos y z el número de carpetas.

$$\left\{\begin{array}{l} 6x+3y+2z=600\\ y=\frac{z}{4}\\ x+z=165 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6x+3y+2z=600\\ 4y-z=0\\ x+z=165 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 3 & 2 & 600\\ 0 & 4 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 165 \end{array}\right)$, $|A|=13\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

c)

$$\left\{\begin{array}{l} 6x+3y+2z=600\\ 4y-z=0\\ x+z=165 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=45\\ y=30\\ z=120 \end{array}\right.$$

0.6. Castilla La Mancha

0.6.1. Modelo de 2020

Problema 0.6.1 En una tienda de comida a granel tienen a la venta tres tipos de judías secas: blancas, canela y pintas. Estas se venden a 2,75, 3 y 2,50 euros el kilogramo, respectivamente. Ayer se vendieron 40 kilos en total por un valor de 111,5 euros. La suma de los kilogramos de judías blancas y canela vendidas fue el triple de las pintas.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos kilogramos de judías de cada tipo se vendieron.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:
Sean x el número de kilos de judías blancas, y el número de kilos de judías canela y z el número de kilos de judías pintas.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=40\\ 2,75x+3y+2,5z=111,5\\ x+y=3z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=40\\ 11x+12y+10z=446\\ x+y-3z=0 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=40 \\ 11x+12y+10z=446 \\ x+y-3z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=14 \\ y=16 \\ z=10 \end{array}\right.$$

Problema 0.6.2 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A\cdot B-C^T$

b) Comprueba que la matriz C no tiene inversa y explica la razón por la que el producto $D^2\cdot B$ no puede ser realizado.

Solución:

a) $A\cdot B-C^T=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 \\ 4 & 2 & 10 \\ 8 & 4 & 20 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 15 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 6 & 16 \end{pmatrix}$

b) $|C|=0\Longrightarrow C$ no tiene inversa.

$\dim(D^2)=3\times 3$ y $\dim(B)=1\times 3\Longrightarrow$ el número de columnas de la matriz D^2 es distinto del número de filas de B.

Problema 0.6.3 Los precios de un gimnasio son diferentes según la franja horaria dispuesta en tres turnos: mañana, mediodía y tarde. Este mes han acudido 150 personas por la mañana, 30 en la franja del mediodía y 270 por la tarde y el gimnasio ha ingresado un total de 15900 euros. La diferencia entre el precio de la tarde y la mañana equivale a la mitad del precio para el mediodía y al sumar los precios del mediodía y la tarde obtenemos el doble del precio de la mañana.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el precio de cada franja horaria.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:
Sean x el precio por la mañana, y el precio por el mediodía y z el precio por la tarde.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} 150x+30y+270z=15900 \\ z-x=0,5y \\ y+z=2x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x+9z+y=530 \\ 2x+y-2z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} 5x+9z+y=530 \\ 2x+y-2z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=30 \\ y=20 \\ z=40 \end{array}\right.$$

0.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.6.4 Un artesano hace botines, botas de media caña y botas de caña alta, vendiendo cada par, respectivamente, a 150, 200 y 250 euros. La diferencia entre los botines y las botas de caña alta vendidas equivalen al número de caña media vendidas. El número de botas de caña alta vendidas es la tercera parte de los botines. Por el total de las ventas obtiene 5500 euros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botas de cada tipo se vendieron.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:
Sean x el nº de botines, y el nº de botas de media caña y z el nº botas de caña alta.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} 150x + 200y + 250z = 5500 \\ x - z = y \\ z = \frac{x}{3} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x + 4y + 5z = 110 \\ x - y - z = 0 \\ x - 3z = 0 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 4y + 5z = 110 \\ x - y - z = 0 \\ x - 3z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 15 \\ y = 10 \\ z = 5 \end{array}\right.$$

Problema 0.6.5 Una marca ofrece paquetes de tortitas de arroz de tres tipos: con espelta, con amapola y con chía. Se venden el triple de paquetes de las de amapola que de las de espelta. Se venden 40 paquetes más de las de amapola que de las de chía. Los precios de los paquetes para espelta, amapola y chía son respectivamente 2,50, 3,50 y 3 euros obteniendo por la venta de todas las tortitas 1640 euros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos paquetes de cada tipo se vendieron.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:
Sean x el nº de paquetes de tortitas con espelta, y el nº de paquetes de tortitas con amapola y z el nº de paquetes de tortitas con chía.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} y = 3x \\ y = z + 40 \\ 2,5x + 3,5y + 3z = 1640 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x - y = 0 \\ y - z = 40 \\ 5x + 7y + 6z = 3280 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} 3x - y = 0 \\ y - z = 40 \\ 5x + 7y + 6z = 3280 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 80 \\ y = 240 \\ z = 200 \end{array}\right.$$

Problema 0.6.6 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula $M = AC - (B - I)^T$ siendo I la matriz identidad de orden 2.

b) Calcula, si es posible, la matriz X tal que $XB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $M = AC - (B - I)^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^T =$

$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 26 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 26 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 24 & 0 \end{pmatrix}$

b) $XB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$

0.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.6.7 La asociación "Stop Stress" tiene 60 personas asociadas que practican solo una de las siguientes actividades: correr, yoga o natación. Se sabe que hay 18 personas menos en la actividad de correr que la suma de personas que practican yoga y natación. Además, la séptima parte de las personas que corren es igual a la quinta parte de las que practican yoga. Calcular el número de personas que realiza cada una de las actividades.
Solución:
Sean x el número de personas que corren, y el número de personas que hacen yoga y z el número de personas que nadan.

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ x + 18 = y + z \\ \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ x - y - z = -18 \\ 5x - 7y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 21 \\ y = 15 \\ z = 24 \end{array}\right.$$

Problema 0.6.8 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcular $AB + C$.
Solución:

$$AB + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \end{pmatrix}$$

0.7. Castilla León

0.7.1. Modelo de 2020

Problema 0.7.1 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y - z = a \\ ax + 2y - z = 3a \\ 2x + ay - z = 6 \end{array}\right.$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ a & 2 & -1 & 3a \\ 2 & a & -1 & 6 \end{array}\right); \quad |A|=2a-a^2=0 \Longrightarrow a=0, \ \ a=2$$

- Si $a\neq 0$ y $a\neq 2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a=2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=2 \\ 2x+2y-z=6 \\ 2x+2y-z=6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_2 \\ F_3-F_2 \end{array}\right]=\left\{\begin{array}{l} x+y-z=2 \\ z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=4-\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{array}\right.$$

Problema 0.7.2 Se consideran las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} -2 & 1 \end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{c} 1 \\ -3 \end{array}\right)$. Calcular, cuando sea posible, los productos matriciales AB y BA.

Solución:

$AB=\left(\begin{array}{cc} -2 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 1 \\ -3 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} -5 \end{array}\right)$

$BA=\left(\begin{array}{c} 1 \\ -3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} -2 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{array}\right)$

0.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.7.3 Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ -3x+2y-5z=2 \\ x+2y-az=-1 \end{array}\right.$$

a) Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.

b) Resuelve el sistema para $a=-2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5 & 2\\ 1 & 2 & -a & -1\end{array}\right);\quad |A|=-8(a+1)=0\Longrightarrow a=-1$$

- Si $a\neq -1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5 & 2\\ 1 & 2 & 1 & -1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+3F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 8 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a=-2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=0\\ -3x+2y-5z=2\\ x+2y+2z=-1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=0\\ z=-1\end{array}\right.$$

Problema 0.7.4 ¿Es posible que una matriz 4×2 coincida con su inversa? ¿Y con su traspuesta?
Solución:
Si una matriz tiene de dimensión 4×2 no es cuadrada y, por tanto, no tiene inversa. Luego la respuesta a la primera pregunta es NO.
Si una matriz tiene de dimensión 4×2 la dimensión de su traspuesta es 2×4 y, por tanto, no pueden coincidir. Luego la respuesta a la segunda pregunta es NO.

0.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.7.5 La asociación "Stop Stress" tiene 60 personas asociadas que practican solo una de las siguientes actividades: correr, yoga o natación. Se sabe que hay 18 personas menos en la actividad de correr que la suma de personas que practican yoga y natación. Además, la séptima parte de las personas que corren es igual a la quinta parte de las que practican yoga. Calcular el número de personas que realiza cada una de las actividades.
Solución:
Sean x el número de personas que corren, y el número de personas que hacen yoga y z el número de personas que nadan.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=60\\ x+18=y+z\\ \frac{x}{7}=\frac{y}{5}\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x+y+z=60\\ x-y-z=-18\\ 5x-7y=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=21\\ y=15\\ z=24\end{array}\right.$$

Problema 0.7.6 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3\\ 5\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 2\\ 1\end{pmatrix}$, calcular $AB+C$
Solución:
$AB+C=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\\ 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13\\ 15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15\\ 16\end{pmatrix}$

0.8. Cataluña

0.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.8.1 Un vendedor de una librería de libros antiguos cobra, además de un sueldo fijo, diferentes comisiones dependiendo del tipo de libro que vende. Cobra 1 € por cada cómic, 1,5 € por cada revista y 2 € por cada novela. Ayer, vendió el doble de revistas que de novelas y 5 cómics menos que revistas, y va a conseguir en total una comisión de 30 €.
¿Cuántas publicaciones vendió de cada tipo?.

Solución:
Sean x número de cómic vendidos, y número de revistas vendidas y z número de novelas vendidas.

$$\left\{\begin{array}{l} x+1,5y+2z=30 \\ y=2z \\ x+5=y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+3y+4z=60 \\ y-2z=0 \\ x-y=-5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ y=10 \\ z=5 \end{array}\right.$$

Problema 0.8.2 Considere las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right)$

a) Compruebe que se cumple $A^{-1}=A^2$.

b) Resolver la ecuación matricial $AX+B=I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) $A=\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1}=\left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$
$A^2=\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1}=A^2$

b) $AX+B=I \Longrightarrow X=A^{-1}(I-B)=\left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\left[\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)-\left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right)\right]=$
$\left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{array}\right)$

0.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.8.3 Consideramos la matriz $A=\left(\begin{array}{cc} x & -2 \\ 5 & -x \end{array}\right)$ estudiar para que valores de x la matriz inversa de la matriz A coincide con su opuesta, es decir, $A^{-1}=-A$.

Solución:
$|A|=-x^2+10=0 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{10} \Longrightarrow \exists A^{-1} \ \forall x \in \mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{10}\right\}$
$A=\left(\begin{array}{cc} x & -2 \\ 5 & -x \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1}=\frac{1}{-x^2+10}\left(\begin{array}{cc} -x & 2 \\ -5 & x \end{array}\right)=-A=\left(\begin{array}{cc} -x & 2 \\ -5 & x \end{array}\right) \Longrightarrow \frac{1}{-x^2+10}=1 \Longrightarrow$
$-x^2+9=0 \Longrightarrow x=\pm 3$

Problema 0.8.4 Un triatlón consta de tres segmentos que hay que realizar consecutivamente practicando tres modalidades de deporte diferentes: natación, ciclismo y carrera a pie. La distancia total que se recorrerá en el triatlón es de 75 km. Sabemos que el recorrido en bicicleta es igual a cuatro veces la distancia que hay recorrer nadando y corriendo conjuntamente. Sabemos también que si sumamos 3 km a la distancia que se hace corriendo nos da lo mismo que cinco veces el recorrido que se hace nadando. Determine la distancia recorrida en cada modalidad.

Solución:
Sean x número de km nadando, y número de km en bici y z número de km corriendo.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=75 \\ y=4(x+z) \\ z+3=5x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=75 \\ 4x-y+4z=0 \\ 5x-z=3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=60 \\ z=12 \end{array}\right.$$

0.9. Comunidad valenciana

0.9.1. Modelo de 2020

Problema 0.9.1 Dada las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{array}\right)$

a) Calcula $(AB)^{-1}$.

b) Calcula $AB^T - A^TB$.

c) Resolver la ecuación $B^TX + A^TB = A^T$.

Siendo A^T y B^T las matrices traspuestas de A y B, respectivamente.
Solución:

a) $(AB)^{-1} = \left[\left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{array}\right)\right]^{-1} = \left(\begin{array}{cc} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/4 \end{array}\right)$

b) $AB^T - A^TB = \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{array}\right)$

c) $B^TX + A^TB = A^T \Longrightarrow B^TX = A^T - A^TB \Longrightarrow X = (B^T)^{-1}A^T(I-B)$

$$X = \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{cc} 5 & -17/2 \\ -4 & 7 \end{array}\right)$$

0.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.9.2 Dada las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{array}\right)$, se pide:

a) Halla la matriz inversa de A.

b) Explica por qué la matriz B no tiene inversa.

c) Razona por qué la matriz AB no tiene inversa.

d) Resolver la ecuación $AB - AX = BA$.

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $|B| = 0 \Longrightarrow \nexists B^{-1}$

c) $|AB| = |A||B| = -1 \cdot 0 = 0 \Longrightarrow \nexists (AB)^{-1}$

d) $AB - AX = BA \Longrightarrow AX = AB - BA \Longrightarrow X = A^{-1}(AB - BA)$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

0.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.9.3 Una fábrica de juguetes artesanales produce camiones, marionetas y rompecabezas de madera. Para fabricar un camión necesita dos kilos de madera y tres horas de trabajo, mientras que para una marioneta necesita quinientos gramos de madera y cuatro horas de trabajo. En el caso de los rompecabezas necesita ochocientos gramos de madera y tres horas y media de trabajo para producir uno. Durante una semana, la empresa ha puesto en el mercado 89 juguetes utilizando exactamente 91 kilos de madera y 313 horas de trabajo. Determina el número de camiones, de marionetas y de rompecabezas producidos.

Solución:
Sea x el nº camiones, y el nº de marionetas y z el nº de rompecabezas.

	kg madera	horas trabajo
Camiones	2	3
Marionetas	$0,5$	4
Rompecabezas	$0,8$	$3,5$
kg Hora	91	313

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 89 \\ 2x + 0,5y + 0,8z = 91 \\ 3x + 4y + 3,5z = 313 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 89 \\ 20x + 5y + 8z = 910 \\ 6x + 8y + 7z = 626 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 23 \\ y = 26 \\ z = 40 \end{array} \right.$$

Problema 0.9.4 Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

se pide:

a) Calcula $(AB)^{-1}$.

b) Calcula $C + AB$.

c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (AB)^{-1}$ y $(C + AB)^{-1}$?

Solución:

a) $(AB)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $C + AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

c) $(C + AB)^{-1} = I^{-1} = I$

$C^{-1} + (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$

Luego las dos matrices resultantes que comparamos son iguales.

0.10. Extremadura

0.10.1. Modelo de 2020

Problema 0.10.1 Sean A y B la matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Hallar, justificando la respuesta, la matriz X que sea solución de ecuación matricial: $AX - B = AB$

Solución:

$AX - B = AB \Longrightarrow AX = AB + B \Longrightarrow X = A^{-1}(AB + B)$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 7/3 \\ 11/3 & 7/3 \end{pmatrix}$$

Problema 0.10.2 Sea A la matriz siguiente: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & x \end{pmatrix}$

a) Determinar, justificando la respuesta, para qué valor del parámetro x no existe A^{-1}.

b) Hallar la inversa de la matriz A para $x = 0$. Justificar la respuesta.

Solución:

a) $|A| = -6(x + 1) = 0 \Longrightarrow x = -1 \Longrightarrow \begin{cases} \nexists A^{-1} & \text{si } x = -1 \\ \exists A^{-1} & \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} \end{cases}$

b) Si $x = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/6 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

0.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.10.3 Sea A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, las matrices X e Y que sean solución del sistema de ecuaciones matriciales siguiente:

$$\begin{cases} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{cases}$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} -2X+Y=A+B \\ 5X+Y=A-2B \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} X=-\dfrac{3}{7}B=\begin{pmatrix} 3/7 & -3/7 \\ 0 & 3/7 \end{pmatrix} \\ \\ Y=\dfrac{1}{7}(7A+B)=\begin{pmatrix} 6/7 & 36/7 \\ 0 & -22/7 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Problema 0.10.4 Sea A la matriz siguiente: $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$

Hallar, justificando la respuesta, el valor de x para el que se verifica $A^t=A^{-1}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A y A^{-1} la matriz inversa de A.

Solución:

$|A|=x^2+1\neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \ \forall x\in\mathbb{R}$
$A^t=\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ y $A^{-1}=\frac{1}{x^2+1}\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$
$A^t=A^{-1}\Longrightarrow \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}=\frac{1}{x^2+1}\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\Longrightarrow 1=\frac{1}{x^2+1}\Longrightarrow x^2=0\Longrightarrow x=0$

0.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.10.5 Sea A, B e I las matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, la matriz X que sea solución de la ecuación matricial:

$$ABX=AB+I$$

Solución:
$ABX=AB+I\Longrightarrow (AB)^{-1}(AB)X=(AB)^{-1}(AB+I)\Longrightarrow X=I+(AB)^{-1}$
$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+$
$\begin{pmatrix} -1/5 & 3/5 \\ -3/10 & 2/5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/10 & 7/5 \end{pmatrix}$

Problema 0.10.6 Sea X, I y O las matrices siguientes:

$$X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\quad O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, los valores del parámetro a para los que se verifica

$$X^2-4X+3I=O$$

Solución:

$$X^2-4X+3I=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2-4a+3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$a^2-4a+3=0\Longrightarrow a=1,\ \ a=3$$

.

0.11. Galicia

0.11.1. Modelo de 2020

Problema 0.11.1 Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz $B^T \cdot A \cdot B$

b) Calcula la inversa de la matriz $A - I$, en donde I es la matriz identidad de orden 2.

c) Despeja la matriz X en la ecuación matricial $AX - B = X$ y calcúlala.

Solución:

a) $B^T \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $AX - B = X \Longrightarrow AX - X = B \Longrightarrow (A - I)X = B \Longrightarrow X = (A - I)^{-1}B$

$$X = (A-I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.11.2 Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule las matrices $A + B$ y $3C - B$

b) Expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear $A+B = 3C-B$ y resuélvalo.

Solución:

a) $A + B = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$3C - B = 3\begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a+b = 3c-b \\ a-b = -9+b \\ a+3 = 3c-3 \end{cases} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} a+2b-3c = 0 \\ a-2b = -9 \\ a-3c = -6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

0.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.11.3 Disponemos de tres granjas A, B y C para la cría ecológica de pollos. La granja A tiene capacidad para criar un 20 % más de pollos que la granja B, y la granja B tiene capacidad para criar el doble de pollos que la granja C. Se sabe además que entre las tres granjas se pueden criar un total de 405 pollos.

a) Formule el sistema de ecuaciones asociado a este problema.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior. ¿Cuántos pollos se pueden criar en cada una de las tres granjas?

Solución:
Sean x número de pollos de la granja A, y número de pollos de la granja B y z número de pollos de la granja C.

a) $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=405 \\ x=1,2y \\ y=2z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=405 \\ 5x-6y=0 \\ y-2z=0 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=405 \\ 5x-6y=0 \\ y-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=180 \\ y=150 \\ z=75 \end{array}\right.$$

0.12. Islas Baleares

0.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.12.1 Se considera el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x+(a+1)y=1 \\ ax+2y=-2 \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema en función del parámetro a.

b) Resolverlo para $a=-2$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a+1 & 1 \\ a & 2 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=-a^2-a+2=0 \Longrightarrow a=-2$ y $a=1$.

- Si $a\neq -2$ y $a\neq 1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$ Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $a = -2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x - y = 1 \\ -2x + 2y = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 0.12.2 Un trayecto de 600 km debe hacerse combinando taxi, ferrocarril y autobús. El coste del taxi es de 0,5 euros/km; el del ferrocarril, de 0,2 euros/km, y el del autobús, de 0,1 euros/km. El recorrido nos ha costado 150 euros, y se sabe que se han hecho el doble de kilómetros con ferrocarril que en taxi y autobús juntos. Determinar las distancias que se han recorrido con cada medio de transporte.

Solución:
Sean x el número de kms en taxi, y el número de kms en ferrocarril y z el número de kms en autobús.

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 0,5x + 0,2y + 0,1z = 150 \\ y = 2(x + z) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 5x + 2y + z = 1500 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 125 \\ y = 400 \\ z = 75 \end{array}\right.$$

0.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.12.3 Bernat quedó ayer con unos amigos en un bar y tomaron 4 cervezas, 3 panecillos y 5 cafés con leche. Todo ello les costó 19,50 euros. Días atrás, había ido al mismo bar con su primo Martí, y por 2 cervezas, 1 panecillo y 2 cafés con leche habían pagado 8,10 euros. En este bar todas las cervezas valen lo mismo y todos los panecillos tienen el mismo precio.

a) Identifique las variables e interprete el enunciado como un conjunto de ecuaciones lineales.

b) Hoy Bernat ha vuelto con otros amigos y han tomado 2 cervezas, 2 panecillos y 3 cafés con leche. Combina las ecuaciones del apartado anterior, para deducir cuánto han pagado en total.

c) Si 1 cerveza, 1 panecillo y 1 café con leche cuestan 5,10 euros, cuánto valen la cerveza, el panecillo y el café con leche separadamente?

Solución: Sean x el precio de una cerveza, y el precio de un panecillo y z el precio de un café con leche.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} 4x + 3y + 5z = 19,50 \\ 2x + y + 2z = 8,10 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8x + 6y + 10z = 39 \\ 20x + 10y + 20z = 81 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} 8x + 6y + 10z = 39 \\ 20x + 10y + 20z = 81 \\ 2x + 2y + 3z = m \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 8 & 6 & 10 & 39 \\ 20 & 10 & 20 & 81 \\ 2 & 2 & 3 & m \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - 5F_1 \\ 4F_3 - F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 8 & 6 & 10 & 39 \\ 0 & -10 & -10 & -33 \\ 0 & 2 & 2 & 4m - 39 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|c} 8 & 6 & 10 & 39 \\ 0 & -10 & -10 & -33 \\ 0 & 0 & 0 & 20m - 228 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow m = \frac{57}{5} = 11,4$$

Si $m \neq 11,4$ el sistema sería incompatible y para este valor será compatible indeterminado, tendrá infinitas soluciones.
Tendrá que pagar 11,4 euros por 2 cervezas, 2 panecillos y 3 cafés con leche.

c)

$$\left\{\begin{array}{l}8x+6y+10z=39\\20x+10y+20z=81\\x+y+z=5,10\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}8x+6y+10z=39\\20x+10y+20z=81\\10x+10y+10z=51\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=9/5=1,8\\y=21/10=2,1\\z=6/5=1,2\end{array}\right.$$

Problema 0.12.4 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$

a) Calcula A^2 y A^3.

b) Calcular A^n y en particular A^{14}.

c) Resolver la ecuación matricial $AX+\frac{1}{5}B^tB=2A$, donde B^t es la matriz traspuesta de B.

Solución:

a) $A^1=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $A^2=AA=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$
$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$

b) $A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}\Longrightarrow A^n=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}\Longrightarrow A^{14}=\begin{pmatrix}1&0\\14&1\end{pmatrix}$

c) $AX+\frac{1}{5}B^tB=2A\Longrightarrow X=A^{-1}\left(2A-\dfrac{1}{5}B^tB\right)$
$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\left[2\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\right]=$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}\right]=$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2/5\\8/5&9/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2/5\\3/5&11/5\end{pmatrix}$$

0.13. Islas Canarias

0.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.13.1 Una tienda de informática vende pendrives de 32 Gb, 64 Gb y 128 Gb, siendo sus precios 5 €, 15 € y 20 €, respectivamente. Un cliente ha comprado un total de 15 pendrives que le han costado 160 €. Sabiendo que el número de pendrives de 128 Gb que compró era la cuarta parte del resto,

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Calcular cuántos pendrives de cada clase compró el cliente.

Solución:
Sean x número de pendrives de 32 Gb, y número de pendrives de 64 Gb y z número de pendrives de 128 Gb.

a)

$$\begin{cases} x+y+z=15 \\ 5x+15y+20z=160 \\ z=\frac{1}{4}(x+y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=15 \\ x+3y+4z=32 \\ x+y-4z=0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x+y+z=15 \\ x+3y+4z=32 \\ x+y-4z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=8 \text{ €} \\ y=4 \text{ €} \\ z=3 \text{ €} \end{cases}$$

0.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.13.2 En un hotel hay 400 turistas de españoles, alemanes e ingleses. El número de alemanes es el 120 % del número de ingleses y estos últimos, sumados a los españoles, superan en 40 al número de alemanes.

a) Plantear el correspondiente sistema.

b) ¿Cuántos españoles, alemanes e ingleses hay en el hotel?

Solución:
Sean x el número de españoles, y el número de alemanes y z el número de ingleses.

a)

$$\begin{cases} x+y+z=400 \\ y=1,2z \\ z+x=40+y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=400 \\ 5y-6z=0 \\ x-y+z=40 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x+y+z=400 \\ 5y-6z=0 \\ x-y+z=40 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=70 \\ y=180 \\ z=150 \end{cases}$$

0.14. La Rioja

0.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.14.1 Consideramos el sistema de ecuaciones lineales donde a es un número real

$$\begin{cases} ay+az=0 \\ y+z=0 \\ 4x-2y+az=a \end{cases}$$

a) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema es compatible y determinado?

b) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema no tenga soluciones?

c) Resuelve el sistema si $a=0$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{array}\right)$; $|A| = 0$ y $\left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{array}\right| = -4 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ El sistema NO puede ser compatible determinado para cualquier valor del parámetro a.
Observación: Para que el sistema sea compatible determinado es necesario que Rango$(A) =$ 3 =Rango$(\overline{A})$ =nº incógnitas.

b)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ aF_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Luego el sistema es compatible indeterminado para cualquier valor del parámetro real $a \Longrightarrow$ el sistema siempre tiene solución.

c) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 + 0 = 0 \\ y + z = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -2\lambda \end{array}\right.$$

Problema 0.14.2 Dada una matriz cuadrada A

a) ¿Puede saberse si tiene inversa sin calcularla explícitamente? ¿Cómo?

b) Sea ahora A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Halla, si existe, la inversa de A.

c) Si A es la matriz del apartado anterior, determina las matrices X e Y de orden 2 tales que:

$$\left\{\begin{array}{l} 3X + 2Y = A \\ X + Y = 2A \end{array}\right.$$

Solución:

a) $\left\{\begin{array}{l} |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1} \\ |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} \end{array}\right.$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

c)

$$\left\{\begin{array}{l} 3X + 2Y = A \\ X + Y = 2A \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} X = -3A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \\ \\ Y = 5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

0.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.14.3 De los bebés que se han inscrito en el mes de mayo en el registro civil de Logroño, 63 tienen de nombre Alba, Lucía, Pedro o Mateo. 48 de ellos tienen los nombres de Alba, Pedro o Mateo. Sabemos que el número de bebés inscritos con el nombre de Pedro es igual a la suma de los inscritos con los nombres de Alba y Mateo; además se han inscrito tantos bebés con el nombre de Alba como la suma de la mitad de los inscritos con el nombre de Pedro más los inscritos con el nombre de Mateo.

a) ¿Cuántos de estos bebés se llaman Alba?, ¿cuántos Pedro?, ¿cuántos Mateo?

b) ¿Cuántos bebés se llaman Lucía?

Solución:
Sean x número inscritos como Alba, y número inscritos como Lucía, z número inscritos como Pedro y t número inscritos como Mateo.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=63 \\ x+z+t=48 \\ z=x+t \\ x=\frac{z}{2}+t \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=63 \\ x+z+t=48 \\ x-z+t=0 \\ 2x-z-2t=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=18 \\ y=15 \\ z=24 \\ t=6 \end{array}\right.$$

a) $\left\{\begin{array}{l} \text{Alba}=18 \ \text{inscritos} \\ \text{Lucía}=15 \ \text{inscritos} \\ \text{Pedro}=24 \ \text{inscritos} \\ \text{Mateo}=6 \ \text{inscritos} \end{array}\right.$

b) El nombre de Lucía se ha contabilizado 15 veces como se observa en el apartado anterior.

Problema 0.14.4 Si $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcular A^2 y A^3.

b) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15} y A^{30}.

c) Resuelve la ecuación matricial $AX=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A^2=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^3=A^2A=IA=A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $A^{15}=\left(A^2\right)^7\cdot A=I^7A=IA=A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
$A^{30}=\left(A^2\right)^{15}=I^{15}=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $AX=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Longrightarrow X=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

0.15. Madrid

0.15.1. Modelo de 2020

Problema 0.15.1 Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores de a y de b para que se verifique $A^2 = 2I$.

b) Para $a = 0$ y $b = 2$, determine la matriz X tal que $XA = B - X$.

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b & a+2 \\ ab+2b & b+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2+b=2 \\ a+2=0 \\ ab+2b=0 \\ b+4=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases}$$

b) $XA = B - X \Longrightarrow XA + X = B \Longrightarrow X(A+I) = B \Longrightarrow X = B(A+I)^{-1}$

$$A+I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = B(A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 0.15.2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Proporcione el valor de m para que $A \cdot B = C^t$

b) Para $m = 0$ calcule B^{-1}.

Solución:

a) $A \cdot B = C^t \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2m-1 & 0 & m+2 \\ m-1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2m-1=3 \\ m+2=4 \\ m-1=1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$m = 2$$

b) $m=0 \Longrightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 0.15.3 Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rl} x+ay+z= & 6 \\ 2x-y+z= & a-1 \\ -x+y+z= & 2 \end{array} \right.$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & a & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & a-1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right); \quad |A|=-3a-1=0 \Longrightarrow a=-\frac{1}{3}$$

- Si $a \neq -\frac{1}{3} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=-\frac{1}{3}$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -\frac{4}{3} \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)=\frac{1}{9}\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 6 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ 3F_3+F_1 \end{array} \right]=\frac{1}{9}\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 0 & -1 & -3 & -40 \\ 0 & 2 & 6 & 24 \end{array} \right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+2F_2 \end{array} \right]=$$

$$\frac{1}{9}\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 0 & -1 & 1 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & -56 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $a=2$:

$$\left\{ \begin{array}{rl} x+2y+z= & 6 \\ 2x-y+z= & 1 \\ -x+y+z= & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{array} \right.$$

0.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.15.4 Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{c} x+ay=0 \\ x+2z=0 \\ x+ay+(a+1)z=a \end{array} \right.$$

Se pide:

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{array} \right)$; $|A| = -a(a+1) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -1$.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, -1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(A) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow SCD$: Sistema compatible determinado, solución única.
- Si $a = -1$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \Longrightarrow SI$: sistema incompatible, no tiene solución.
- Si $a = 0$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{array} \right] =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow SCI$: sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b) Si $a = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Problema 0.15.5 Se considera la matriz A dada por $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.

b) Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 - 5A = -4I$:

$$\begin{pmatrix} 11 & m+1 & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 \\ 0 & 5m & 0 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & m-4 & 10 \\ 0 & m^2 - 5m & 0 \\ 5 & 4-m & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m - 4 = 0 \\ m^2 - 5m = -4 \\ 4 - m = 0 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow m = 4$$

b) Si $m = 1$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 4 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

0.15.3. Convocatoria Ordinaria-Coincidente junio de 2020

Problema 0.15.6 Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule A^2 y A^{10}.

b) Calcule $(AA-3I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}, \ldots,$

$$A^{10}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix}$$

b) $B=AA-3I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(AA-3I)^{-1}=B^{-1}=\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 0.15.7 Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3x+2y+z=2a \\ 2x+ay+2z=3 \\ -x-y-z=2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a=0$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right);\quad |A|=4-2a=0\Longrightarrow a=2$$

- Si $a\neq 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2z = 3 \\ -x - y - z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{11}{4} \\ \\ y = -\dfrac{7}{2} \\ \\ z = -\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$$

0.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.15.8 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la igualdad $A^2 - 5A = -I$, donde I es la matriz identidad.

b) Calcule A^{-1} para $a = -1$.

Solución:

a) $A^2 - 5A = -I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 5a^2 - 6 & 0 \\ 0 & 5a^2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = \pm 1$

b) Si $a = -1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Problema 0.15.9 Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \overline{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} x - ay = 1 \\ ax - 4y - z = 2 \\ 2x + ay - z = a - 4 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 & 2 \\ 2 & a & -1 & a-4 \end{array}\right); \quad |A| = -a^2 + 3a + 4 = 0 \Longrightarrow a = -1, \ \ a = 4$$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

- Si $a = 4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a = 3$:

$$\left\{\begin{array}{c} x - 3y = 1 \\ 3x - 4y - z = 2 \\ 2x + 3y - z = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1/2 \\ y = -1/2 \\ z = -3/2 \end{array}\right.$$

0.16. Murcia

0.16.1. Modelo de 2020

Problema 0.16.1 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^{-1}.

b) Calcule el valor del parámetro a para que $B + C = A^{-1}$.

c) Calcule el valor del parámetro a para que $A + B + C = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) Calcule $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow a - 1 = -1 \Longrightarrow a = 0$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = 0$

0.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.16.2 Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{l} x + ay + z = 1 \\ 2y + az = 2 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right.$$

Resolverlo para $a = 3$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = a^2 - a = 0 \Longrightarrow a = 0, \ a = 1$$

- Si $a \neq 0$ y$a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = [F_3 = F_1] \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si $a = 3$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y + z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 0 \\ z = 2/3 \end{array} \right.$$

0.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.16.3 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule $(A - B)$.

b) Calcule $(A - B)^{-1}$.

c) Hallar la matriz X que verifica $AX - A = BX + B$.

Solución:

a) $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) $AX - A = BX + B \Longrightarrow AX - BX = B + A \Longrightarrow (A - B)X = B + A \Longrightarrow X = (A - B)^{-1}(B + A)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

0.17. Navarra

0.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.17.1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, responda a las siguientes cuestiones:

a) Determine el valor de m para que $AB = BA$.

b) Calcule CB^{-1} y DC^t.

c) ¿Qué dimensión debe tener una matriz N para que pueda calcularse el producto DNC ? ¿Y para qué NBD^t sea matriz cuadrada? Razone las respuestas.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -m-5 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2m+1 & -10 \end{pmatrix} \Longrightarrow -m-5 = 2m+1 \Longrightarrow m = -2$

b) $CB^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$DC^t \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\underset{3\times 2}{D} \cdot N \cdot \underset{1\times 2}{C} \Longrightarrow \underset{2\times 1}{N}$ y $\underset{3\times 2}{DNC}$; $\dim(N) = 2 \times 1$.

$N \cdot \underset{2\times 2}{B} \cdot \underset{2\times 3}{D^t}$ para que la matriz resultante sea cuadrada tendríamos: $\underset{3\times 2}{N} \cdot \underset{2\times 2}{B} \cdot \underset{2\times 3}{D^t} \Longrightarrow$

$$\dim(N) = 3 \times 2$$

.

0.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.17.2 Clasifique el siguiente sistema en función del número de soluciones y resuélvalo utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & -4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

El sistema tiene infinitas soluciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+z=3\\ 3y-z=-2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-2\lambda\\ y=\lambda\\ z=2+3\lambda \end{array}\right.$$

Problema 0.17.3 Dadas las matrices $A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & -2 \end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{rrr} -7 & -1 & 2\\ 12 & 2 & -3\\ -8 & -1 & 2 \end{array}\right)$, calcule AB e indique qué relación hay entre A y B.

Solución:

$$AB=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & -2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rrr} -7 & -1 & 2\\ 12 & 2 & -3\\ -8 & -1 & 2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$AB=I \Longrightarrow B=A^{-1} \text{ y } A=B^{-1}$$

0.18. País Vasco

0.18.1. Modelo de 2020

Problema 0.18.1 Sean las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} 2 & 0\\ 0 & 1 \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{cc} 1 & 0\\ 1 & 2 \end{array}\right)$ y $C=\left(\begin{array}{cc} 10 & 11\\ 4 & 7 \end{array}\right)$

a) Determina la matriz inversa de la matriz $I+B$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

b) Calcular las matrices X e Y que verifican que:

$$\left\{\begin{array}{l} AX+BY=C\\ AX=Y \end{array}\right.$$

Solución:

a) $(I+B)^{-1}=\left[\left(\begin{array}{cc} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc} 1 & 0\\ 1 & 2 \end{array}\right)\right]^{-1}=\left(\begin{array}{cc} 2 & 0\\ 1 & 3 \end{array}\right)^{-1}=\left(\begin{array}{rr} 1/2 & 0\\ -1/6 & 1/3 \end{array}\right)$

b) $\left\{\begin{array}{l} AX+BY=C\\ AX=Y \end{array}\right. \Longrightarrow Y+BY=C \Longrightarrow (I+B)Y=C \Longrightarrow Y=(I+B)^{-1}C$

$$Y=(I+B)^{-1}C=\left(\begin{array}{rr} 1/2 & 0\\ -1/6 & 1/3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} 10 & 11\\ 4 & 7 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rr} 5 & 11/2\\ -1/3 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$AX=Y \Longrightarrow X=A^{-1}Y=\left(\begin{array}{cc} 2 & 0\\ 0 & 1 \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{rr} 5 & 11/2\\ -1/3 & 1/2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rr} 5/2 & 11/4\\ -1/3 & 1/2 \end{array}\right)$$

0.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.18.2 Se considera la ecuación matricial:

$$AX = A^tB \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué dimensión debe tener la matriz X?

b) Resuelve la ecuación matricial.

Solución:

a) $\underset{3\times3}{A} \cdot X = \underset{3\times3}{A^t} \cdot \underset{3\times1}{B} \Longrightarrow \underset{3\times3}{A} \cdot X = \underset{3\times1}{A^tB} \Longrightarrow \underset{3\times1}{X} \Longrightarrow \dim(X) = 3 \times 1.$

b) $AX = A^tB \Longrightarrow X = A^{-1}A^tB$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -13 & 8 & -8 \\ 6 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$$

0.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.18.3 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcular la inversa de la matriz AA^t.

b) ¿Admite inversa la matriz (A^tA)?

c) Calcular, cuando sea posible: AB y A^tB.

Solución:

a) $(AA^t) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7/3 & -4/3 \\ -4/3 & 5/6 \end{pmatrix}$

b) $A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix}$ y $|A^tA| = 0 \Longrightarrow \nexists\, (A^tA)^{-1}$

c) $\underset{2\times3}{A} \cdot \underset{2\times2}{B} \Longrightarrow A$ y B no se pueden multiplicar.

$$A^tB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$