Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Ordinaria 2022) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Calcule A^{-1} para $a = 1$.

Solución:

a) $|A| = a^2 - 2a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1 \pm \sqrt{3}$
$\exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \left\{1 \pm \sqrt{3}\right\}$

b) Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2 puntos)* El dueño de una empresa que organiza fiestas infantiles quiere hacer chocolate con leche y dispone para la mezcla de 30 litros de leche y 20 litros de chocolate líquido. Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche, y por cada litro de leche debe echar como máximo 1,6 litros de chocolate. Además, solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche. Por cada litro de leche de la mezcla puede obtener un beneficio de 1€ y por cada litro de chocolate un beneficio de 2€. Determine cuántos litros de leche y de chocolate líquido debe mezclar para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

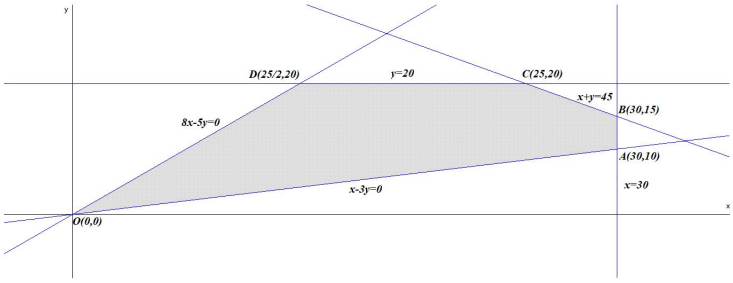
Solución:

Sean x la cantidad en litros de leche en la mezcla e y la cantidad en litros de chocolate en la mezcla.

$f(x, y) = x + 2y$ sujeto a

$$S: \begin{cases} x \le 3y \\ y \le 1,6x \\ x + y \le 45 \\ 0 \le x \le 30 \\ 0 \le y \le 20 \end{cases} \Longrightarrow S: \begin{cases} x - 3y \le 0 \\ 1,6x - y \ge 0 \\ x + y \le 45 \\ 0 \le x \le 30 \\ 0 \le y \le 20 \end{cases} \Longrightarrow S: \begin{cases} x - 3y \le 0 \\ 8x - 5y \ge 0 \\ x + y \le 45 \\ 0 \le x \le 30 \\ 0 \le y \le 20 \end{cases}$$

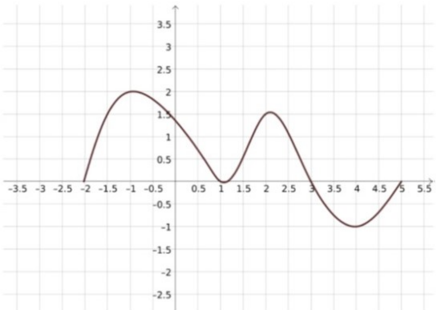
Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(30,10)$, $B(30,15)$, $C(25,20)$ y $D\left(\frac{25}{2},20\right)$.



$$f(x,y)=x+2y \text{ en } S: \begin{cases} f(0,0)=0 \\ f(30,10)=50 \\ f(30,15)=60 \\ f(25,20)=65 \\ f\left(\frac{25}{2},20\right)=52,5 \end{cases} \Longrightarrow \text{ El beneficio máximo será}$$

de 65€ y se alcanza mezclando 25 litros de leche y 20 litros chocolate.

Problema 3 *(2 puntos)* La figura dada representa la gráfica de cierta función f.



La gráfica representada tiene tangentes horizontales en $x=-1$, $x=1$, $x=2$ y $x=4$.

a) Determine razonadamente los intervalos en los que $f'(x)>0$.

b) Determine razonadamente cuál es el signo de

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$$

Solución:

a) $f'(x)>0 \Longrightarrow f$ creciente $(-2,-1)\cup(1,2)\cup(4,5)$.

b) $\displaystyle\int_{-2}^{5} f(x)\,dx=\int_{-2}^{3} f(x)\,dx+\int_{3}^{5} f(x)\,dx=S_1+S_2$

Tenemos $S_1>0$, $S_2<0$ y $|S_1|>|S_2| \Longrightarrow S_1+S_2>0$

Problema 4 *(2 puntos)* Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A) = 0,6$, $P(A|B) = 0,4$ y $P(A|B^c) = 0,8$. Siendo B^c es el suceso complementario de B. Calcule:

a) $P(B)$.

b) ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.

Solución:
Por costumbre utilizaremos $\overline{B} = B^c$.

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = 0,4 \Longrightarrow P(A\cap B) = 0,4P(B)$
$P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A\cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = 0,8 \Longrightarrow P(A\cap \overline{B}) = 0,8P(\overline{B})$
$P(A\cap \overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) = 0,6 - 0,4P(B)$
$0,6 - 0,4P(B) = 0,8P(\overline{B}) = 0,8(1 - P(B)) \Longrightarrow$
$0,6 - 0,4P(B) = 0,8 - 0,8P(B) \Longrightarrow 0,4P(B) = 0,2 \Longrightarrow$
$P(B) = \dfrac{1}{2} = 0,5$

b) $P(A\cap B) = 0,4P(B) = 0,4\cdot 0,5 = 0,2 \neq P(A)\cdot P(B) = 0,6\cdot 0,5 = 0,3 \Longrightarrow$ A y B no son independientes.

Problema 5 *(2 puntos)* Una cementera rellena sacos de cemento cuyo peso en kilogramos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 2 kg.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es 50 kg. Determine un intervalo de confianza del 99 % para el peso medio de un saco de cemento.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilogramo, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

$$N(\mu, 2)$$

a) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\dfrac{2}{\sqrt{20}} = 1,1516$
$IC = (\overline{X}-E, \overline{X}+E) = (50-1,1516, 50+1,1516) = (48,8484; 51,1516)$

b) $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,645\dfrac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge (1,645 \cdot 2)^2 = 10,8241 \Longrightarrow$
$n = 11$.

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Ordinaria 2022) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \overline{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} x + ay + z = a \\ ax - y - az = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a \\ a & -1 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 2a(1-a) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 1$$

- Si $a \ne 0$ y $a \ne 1 \Longrightarrow |A| \ne 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $a = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 2 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1/4 \\ y = 1 \\ z = -1/4 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

a) Determine sus asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

b) Calcule $f'(x)$ y halle el valor de $f'(2)$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = +\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

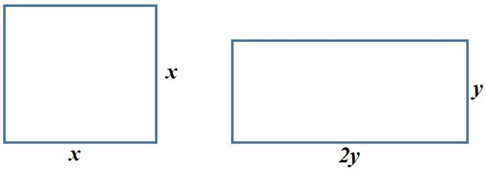
$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x - 1} \right) = 0$$

$$y = x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \Longrightarrow f'(2) = 0$

Problema 3 *(2 puntos)* Un escultor quiere dividir un alambre muy fino en dos trozos que se utilizarán para delimitar, respectivamente, un cuadrado y un rectángulo cuya base debe medir el doble que su altura. Posteriormente, se fabricarán ambas figuras planas con un material que cuesta 16 céntimos de euro/cm^2 para el cuadrado y 10 céntimos de euro/^{2} para el rectángulo. Si el alambre inicial mide 450 cm, determine la función de coste total de ambas figuras. Obtenga la longitud de cada trozo de alambre para que el coste total de estas piezas sea mínimo.
Sugerencia: Exprese el coste total en función de la altura del rectángulo y utilice 3 cifras decimales para realizar los cálculos.
Solución:



- $L(x,y) = 4x + 6y = 450 \Longrightarrow y = \dfrac{225-2x}{3}$
- $C(x,y) = 16x^2 + 20\cdot y^2 \Longrightarrow$
  $C(x) = 16x^2 + 20\left(\dfrac{225-2x}{3}\right)^2 = \dfrac{4(56x^2 - 4500x + 253125)}{9}$
- $C'(x) = \dfrac{16(28x-1125)}{9} = 0 \Longrightarrow x = 40,179$ cm $C''(x) = \dfrac{448}{9} \Longrightarrow$
  $C''(40,179) = \dfrac{448}{9} > 0 \Longrightarrow x = 40,179$
  cm es un mínimo relativo, con $y = \dfrac{225 - 2\cdot 40,179}{3} = 48,214$ cm
- Para el cuadrado necesita $4x = 4\cdot 40,179 = 160,714$ cm y para hacer el rectángulo $6y = 6\cdot 48,214 = 289,284$ cm

Problema 4 *(2 puntos)* Una carta escogida al azar es eliminada (sin ser vista) de un mazo de 52 cartas de póker, en el que hay 13 cartas de cada palo (diamantes, corazones, picas y tréboles). Una vez eliminada, se escoge al azar una carta, entre las que quedan en el mazo, y esta segunda carta es observada.

a) Calcule la probabilidad de que la carta observada sea de diamantes.

b) Si la carta observada no es diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

Solución:

D_1: diamante en la primera extracción y D_2: diamante en la segunda extracción.

a) $P(D_2) = P(\overline{D_1} \cap D_2) + P(D_1 \cap D_2) = \dfrac{39}{52} \cdot \dfrac{13}{51} + \dfrac{13}{52} \cdot \dfrac{12}{51} = \dfrac{1}{4} = 0,25$

b) $P(\overline{D_1}|\overline{D_2}) = \dfrac{P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} = \dfrac{\frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51}}{1 - \frac{1}{4}} = \dfrac{38}{51} \simeq 0,7451$

Problema 5 *(2 puntos)* Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

a) Determine el valor de σ sabiendo que $I = (58,2; 73,8)$ es un intervalo de confianza del 95 % para μ.

b) Si $\sigma = 20$, calcule $P(-10 < \overline{X} - \mu < 10)$.

Solución:

$$N(\mu; \sigma)$$

a) $n = 10$, $E = \dfrac{73,8 - 58,2}{2} = 7,8$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 7,8 = 1,96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{10}} \Longrightarrow \sigma = \dfrac{7,8\sqrt{10}}{1,96} = 12,58$

b) $n = 10$ y $\sigma = 20 \Longrightarrow X : N(\mu; \sigma) \longrightarrow \overline{X} : N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \dfrac{20}{\sqrt{10}}\right) = N(\mu; 6,32)$
$P(-10 < \overline{X} - \mu < 10) = P\left(\dfrac{-10}{6,32} < Z < \dfrac{-10}{6,32}\right) =$
$P(-1,58 < Z < 1,58) = P(z < 1,58) - P(z < -1,58) =$
$P(z < 1,58) - (1 - P(z < 1,58)) = 2P(z < 1,58) - 1 = 2 \cdot 0,9429 - 1 = 0,8858$