Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria 2022)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

.

a) Determine los valores del parámetro real a para que A tenga inversa.

b) Calcule, para $a = 1$, la solución del sistema $(A - B)X = Y$.

Solución:

a) $|A| = 4a = 0 \Longrightarrow a = 0$
$\exists A^{-1} \ \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$

b) Si $a = 1$:

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)X = Y \Longrightarrow X = (A - B)^{-1}Y \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -5/4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{5}{4}, \quad z = -2$$

Problema 2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por

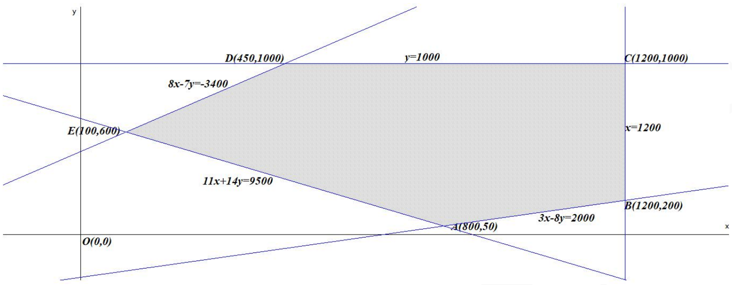
$$7y - 8x \le 3400, \ \ 3x - 8y \le 2000, \ \ 11x + 14y \ge 9500, \ \ x \le 1200, \ \ y \le 1000$$

a) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x+y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza.

Solución:

a)
$$S : \begin{cases} 7y - 8x \leq 3400 \\ 3x - 8y \leq 2000 \\ 11x + 14y \geq 9500 \\ x \leq 1200 \\ y \leq 1000 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 8x - 7y \geq -3400 \\ 3x - 8y \leq 2000 \\ 11x + 14y \geq 9500 \\ x \leq 1200 \\ y \leq 1000 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A(800, 50)$, $B(1200, 200)$, $C(1200, 1000)$, $D(450, 1000)$ y $E(100, 600)$.

b) $f(x, y) = 2x + y$ en S:
$$\begin{cases} f(800, 50) = 1650 \\ f(1200, 200) = 2600 \\ f(1200, 1000) = 3400 \\ f(450, 1000) = 1900 \\ f(100, 600) = 800 \end{cases} \Longrightarrow$$
El valor mínimo de la función en S se alcanza en el punto $E(100, 600)$ con un valor de 800.

Problema 3 *(2 puntos)* Considere las funciones reales de variable real $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + ax + 3$.

a) Se define $h(x)$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \leq 1 \\ g(x) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

¿Qué valor debe darle a la constante $a \in \mathbb{R}$ para que la función h sea continua en $\mathbb{R}$?

b) Para $a = 2$, halle el área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de f y de g.

Solución:

a) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -x^2 + ax + 3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ las dos ramas son polinómicas y continuas. Hay que estudiar la continuidad en $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 4x + 3) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x^2 + ax + 3) = a + 2 \\ h(1) = 0 \end{cases}$$

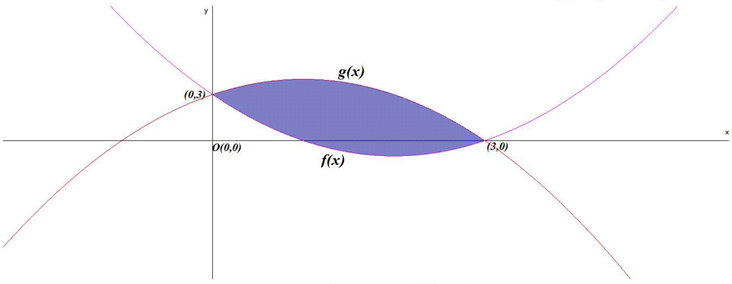
Para que h sea continua en $x = 1 \Longrightarrow a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -2$
En conclusión si $a = -2$ la función h es continua en $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 3 \Longrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3$.

$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (2x^2 - 6x)\, dx = \dfrac{2x^3}{3} - 3x^2 + C$

$S_1 = \int_0^3 (f(x) - g(x))\, dx = F(3) - F(0) = -9$

$S = |S_1| = 9\ u^2$



Problema 4 *(2 puntos)* Supongamos que el espacio muestral de cierto experimento aleatorio es la unión de los sucesos A y B. Esto es, $E = A \cup B$. Además suponga que $P(A \cap B) = 0,2$ y $P(B) = 0,7$.

a) Calcule $P(A^c)$.

b) Calcule $P(A^c \cup B^c)$.
Nota: A^c y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.

Solución:

Por costumbre utilizaremos $\overline{B} = B^c$.

a) $P(A \cup B) = P(E) = 1 = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow$
$1 = P(A) + 0,7 - 0,2 \Longrightarrow P(A) = 0,5 \Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - 0,5 = 0,5$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$

Problema 5 *(2 puntos)* Una muestra de tornillos, tomada de una compañía encargada de fabricarlos, ha permitido obtener un intervalo de confianza del 95 % para estimar la proporción de tornillos con defectos de fabricación, siendo 0,2 y 0,3 los extremos de dicho intervalo.

a) Estime la proporción de tornillos con defectos de fabricación a partir de esa muestra y dé una cota del error de estimación al nivel de confianza considerado.

b) Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería el error máximo de estimación si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 700 tornillos?

Solución:

$NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

a) $IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,2; 0,3) \Longrightarrow 2E = 0,1 \Longrightarrow E = 0,05$ y $\hat{p} = 0,25$

b) $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\dfrac{0,25 \cdot 0,75}{700}} = 0,03208$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria 2022) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} x + ay + z = 2 \\ x - az = 0 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right.$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = 1 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = -1, \ \ a = 1$$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-2F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{c} x+z=2\\ x=0\\ x+y+z=2\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=0\\ z=2\end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)*

a) Determine los valores de los parámetros $a,b\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$ verifique que $f(2)=4$ y $f'(2)=0$.

b) Encuentre todas las asíntotas de la función $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

Solución:

a) $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}\Longrightarrow f'(x)=a-\dfrac{b}{x^2}$

$$\left\{\begin{array}{l} f(2)=4\Longrightarrow 2a+\dfrac{b}{2}=4\\ f'(2)=0\Longrightarrow a-\dfrac{b}{4}=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} 4a+b=8\\ 4a-b=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} a=1\\ b=4\end{array}\right.$$

b) Asíntotas de $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

☛ Verticales: $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1}{x}=\left[\frac{1}{0^-}\right]=-\infty,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{x}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$y = x$$

Problema 3 *(2 puntos)* Un investigador ha desarrollado un fertilizante para un determinado cultivo. Los estudios de mercado indican que los ingresos, $I(x)$, en miles de euros, vienen expresados por la función

$$I(x) = x\frac{170 - 0,85x}{5},$$

en la que x representa la demanda del producto, expresada en miles de litros. Por otra parte, los costes de producción que asume la empresa, en miles de euros, se expresan en función de la demanda mediante la función $C(x) = 10 + 2x + x^2$.

a) Proporcione una expresión para la función beneficio en términos de la demanda x y encuentre la cantidad de producto que debería venderse para maximizarlo. Obtenga también el beneficio máximo.

b) Determine entre qué valores debería encontrarse la cantidad demandada de fertilizante para que el coste medio, $C(x)/x$, no supere los diez mil euros.

Nota: Exprese los resultados con 2 cifras decimales.

Solución:

a) La función beneficio sería:
$B(x) = I(x) - C(x) = x\dfrac{170 - 0,85x}{5} - (10 + 2x + x^2) \Longrightarrow$
$B(x) = -\dfrac{117x^2 - 3200x + 1000}{100}$
$B'(x) = \dfrac{1600 - 117x}{50} = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1600}{117} \Longrightarrow 13675,21\,\text{litros}$
$B''(x) = -\dfrac{117}{50} \Longrightarrow B''\left(\dfrac{1600}{117}\right) < 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1600}{117}$ es un máximo relativo con un beneficio de $B\left(\dfrac{1600}{117}\right) = 208,8034188 \Longrightarrow 208803,42$€

b) $\dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{x^2+2x+10}{x} \le 10 \Longrightarrow \dfrac{x^2+2x+10}{x} - 10 \le 0 \Longrightarrow$
$\dfrac{x^2-8x+10}{x} \le 0 \Longrightarrow x \in [1,550510257; 6,449489742]$.
Los costes medios inferiores a 10.000 euros se consiguen con una producción comprendida entre 1550,51 y 6449,48 litros.

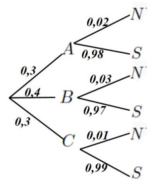
Problema 4 *(2 puntos)* Tres amigas (Ana, Berta y Carla) elaboran una lista para hacer una fiesta sorpresa a una compañera de trabajo. Ana enviará el 30 % de las invitaciones, Berta el 40 % y Carla las restantes. El 2 % de los nombres de la lista de Ana son incorrectos y las invitaciones no llegarán a su destino. En las listas de Berta y Carla, los porcentajes de nombres incorrectos son 3 % y 1 %, respectivamente.

a) Calcule la probabilidad de que una invitación no llegue a su destino.

b) Si una invitación no llegó a su destino, ¿cuál es la probabilidad de que la haya enviado Ana?

Solución:

A la envía Ana, B la envía Berta, C la envía Carla, N no llega y S si llega.



a) $P(N) = P(N|A)P(A) + P(N|B)P(B) + P(N|C)P(C) =$
$0,02 \cdot 0,3 + 0,03 \cdot 0,4 + 0,01 \cdot 0,3 = 0,021$

b) $P(A|N) = \dfrac{P(N|A)P(A)}{P(N)} = \dfrac{0,02 \cdot 0,3}{0,021} = 0,2857$

Problema 5 *(2 puntos)* Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 15. Se toma una muestra aleatoria simple para estimar la media muestral que arroja un intervalo de confianza cuyos extremos son 157,125 y 182,875.

a) Calcule el valor de la media muestral.

b) Si el tamaño de la muestra es 9, ¿cuál es el nivel de confianza para este intervalo?

Solución:

$$N(\mu; 15)$$

a) $IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (157,125; 182,875) \Longrightarrow$
$\overline{X} = \dfrac{157,125 + 182,875}{2} = 170$
$E = \dfrac{182,875 - 157,125}{2} = 12,875$

b) $E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 12,875 = Z_{\alpha/2}\dfrac{15}{\sqrt{9}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = \dfrac{12,875}{5} = 2,575$
$P(Z \le 2,575) = 0,9950 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow NC = 99\,\%$