Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Mayo 2022

Problema 1 Dada la función $f(x) = \dfrac{3x-15}{4x^2+4x-120}$

a) ¿En qué puntos es discontinua?

b) ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad? Justifica la respuesta.

c) Calcular los dos límites laterales en $x = -6$. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

Solución:

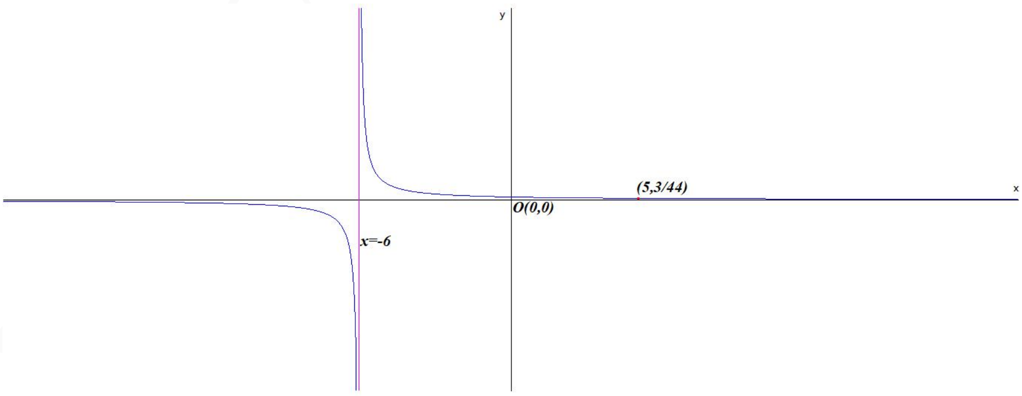
a) La función es discontinua en los puntos en los que se anula el denominador $4x^2 + 4x - 120 = 0 \Longrightarrow x = -6$ y $x = 5$. El $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-6, 5\}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to -6} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \left[\frac{-33}{0}\right] = \pm\infty$, en este punto no hay discontinuidad evitable.
$\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 5} \frac{3}{8x+4} = \frac{3}{44}$, en este punto hay una discontinuidad evitable.
La extensión por continuidad de esta función sería:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-15}{4x^2+4x-120} & \text{si} \quad x \neq \{5, -6\} \\ \\ \dfrac{3}{44} & \text{si} \quad x = 5 \end{cases}$$

función continua en $x = 5$ pero no en $x = -6$.

c) En $x = -6$ la función tiene una asíntota vertical:
$\displaystyle\lim_{x\to -6^-} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \left[\frac{-33}{0^+}\right] = -\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to -6^+} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \left[\frac{-33}{0^-}\right] = +\infty$



Problema 2 Dada la función $f(x) = \dfrac{3x^2}{(x+4)^2}$, obtener:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.

b) Las asíntotas.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

d) Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

e) Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Solución:

a)
- ☛ $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-4\}$
- ☛ Corte con el eje de abscisas: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{3x^2}{(x+4)^2} = 0 \Longrightarrow (0,0)$
- ☛ Corte con el eje de ordenadas: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0,0)$

b) Asíntotas:

- ☛ Verticales: $x = -4$
  $\lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{3x^2}{(x+4)^2} = \left[\dfrac{48}{0^+}\right] = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{3x^2}{(x+4)^2} = \left[\dfrac{48}{0^+}\right] = +\infty$
- ☛ Horizontales: $y = 2$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2}{(x+4)^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{(x+4)^2} = 3$$

- ☛ Oblicuas: no hay por haber horizontales.

c) Monotonía: $f'(x) = \dfrac{24x}{(x+4)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$

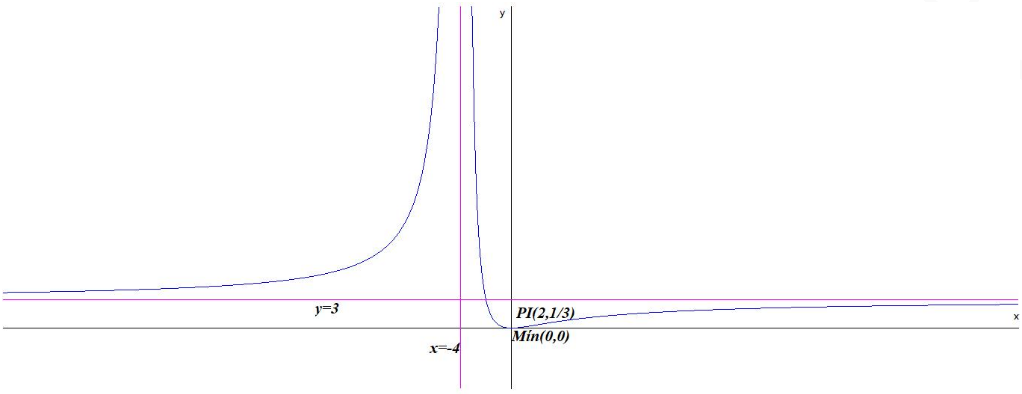
	$(-\infty,-4)$	$(-4,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$ y decreciente en $(-4,0)$.
Tiene un mínimo relativo en el punto $(0,0)$

d) Curvatura: $f'(x) = -\dfrac{48(x-2)}{(x+4)^4} = 0 \Longrightarrow x = 2$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,2)$	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	cóncava $\smile$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$

La función es cóncava $\smile$ en el intervalo $(-\infty,-4)\cup(-4,2)$ y convexa $\frown$ en el $(2,+\infty)$ con un punto de inflexión en $\left(2,\dfrac{1}{3}\right)$



Problema 3 Una agencia de viajes organiza una excursión para los empleados de una empresa. Eso le supone unos gastos fijos por viajero de 475 euros además de los 850 euros del alquiler del autocar. Con un grupo de 20 personas, cobra a cada viajero 525 euros, pero presenta la siguiente oferta a la empresa: por cada nuevo viajero inscrito, rebajará el precio del viaje en 1,25 euros. ¿Con cuántos viajeros consigue unos beneficios máximos? ¿Cuánto paga cada viajero?

Solución:

Sea x el número de viajeros que hay por encima de los 20.

Gasto: $G(x)=475(20+x)+850$

Ingresos: $I(x)=(525-1,25x)(20+x)$

Beneficio: Ingresos-Gastos$\equiv B(x)=I(x)-G(x)\Longrightarrow$

$B(x)=(525-1,25x)(20+x)-475(20+x)-850=-\dfrac{5x^2}{4}+25x-1850$

$B'(x)=\dfrac{50-5x}{2}=0\Longrightarrow x=10$

$B''(x)=-\dfrac{5}{2}<0\Longrightarrow x=10$ es un máximo relativo.

Deberá coger 10 viajeros más y obtendría un beneficio $B(10)=275$€.

Cada viajero pagaría $525-10\cdot 1,25=512,5$€

Problema 4 Dada la función $f(x)=x^3-3x$, obtener:

a) Obtener sus puntos de corte con los ejes OX y OY.

b) Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

c) Determinar sus intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

d) Dibujar la gráfica de $f(x)$ e indicar la región delimitada por dicha curva y la recta $y = x$.

e) Calcular el área de la región anterior.

Solución:

a)
- ☛ $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- ☛ Corte con el eje de abscisas: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 3x = 0 \Longrightarrow (0,0)$ y $(\pm\sqrt{3}, 0)$
- ☛ Corte con el eje de ordenadas: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0,0)$

b) Monotonía: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

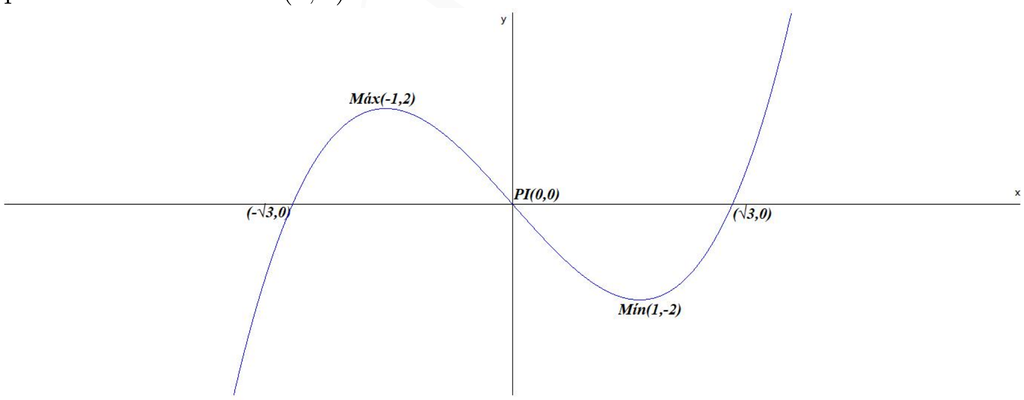
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 1)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $(1, -2)$ y un máximo relativo en $(-1, 2)$

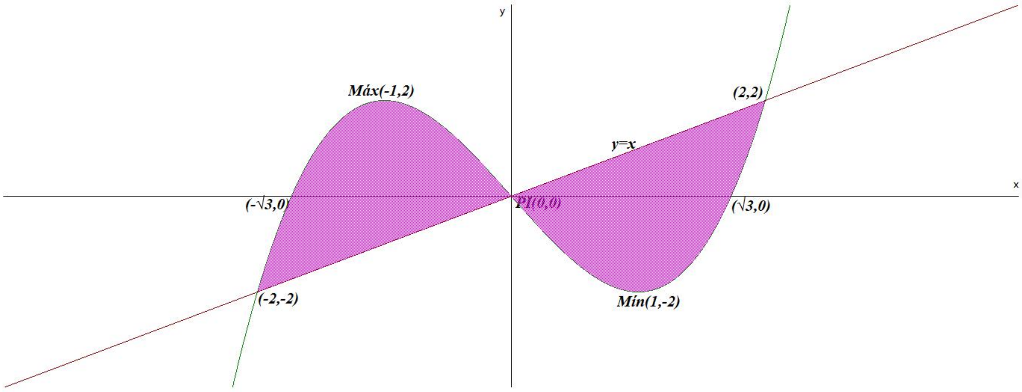
c) Curvatura: $f'(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es cóncava $\smile$ en el intervalo $(0, \infty)$ y convexa $\frown$ en el $(-\infty, 0)$ con un punto de inflexión en $(0, 0)$



d) Calculamos los puntos de corte de las dos gráficas:
$x^3 - 3x = x \Longrightarrow x = \pm 2$:



e) La función es impar $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x) \Longrightarrow$ simétrica respecto al origen de coordenadas y el área en $[-2, 0]$ es igual al área en $[0, 2]$
$S_1 = \displaystyle\int_0^2 (x^3 - 4x)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2 = -4$

$$S = 2|S_1| = 8\ u^2$$