Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2022

Problema 1 Un grupo de jóvenes emprendedores valoran abrir una empresa y, para ello, han encargado un estudio de mercado en el que estimaron que los beneficios para los próximos años, en cientos de miles de euros, vendrán dados por la función:

$$B(t) = \frac{2t-6}{t+4}$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

a) ¿En qué intervalo la empresa tendrá pérdidas?

b) En qué momento $t \in [3, 10]$ se alcanza el máximo beneficio y a cuántos euros asciende su valor. Justifica la respuesta.

c) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener un beneficio de 150.000€?

d) En un horizonte infinito de tiempo, ¿existe límite para el beneficio? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

Solución:

a) Como t es positivo tenemos que el denominador $t+4 > 0$. por otra parte $2t-6 = 0 \Longrightarrow t = 3$, luego la función beneficio es negativa de 0 a 3 años. En el intervalo $[0, 3)$.

b) $B'(t) = \dfrac{14}{(t+4)^2} > 0 \Longrightarrow$ no hay extremos relativos y la función es siempre creciente, luego el máximo beneficio en el intervalo $[3, 10]$ se produce cuando $t = 10 \Longrightarrow B(10) = 1 \Longrightarrow 100000€$

c) $B(t) = \dfrac{2t-6}{t+4} = 1,5 \Longrightarrow 2t-6 = 1,5t+6 \Longrightarrow t = 24$ años.

d) $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} B(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \dfrac{2t-6}{t+4} = 2 \Longrightarrow$ los beneficios tienden a estabilizarse en 200000€.

Problema 2 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{1-x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ bx^2 + 2x + c & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

donde a, b, c son parámetros reales. Se pide:

a) Determina los valores de los parámetros para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ y $f'(-1) = -1$. Caracteriza si el extremo es máximo o mínimo.

b) Calcula, para los valores $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$; $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$

c) Calcula, para los valores $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$; $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:

a) ☛ Continua en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{a}{1-x} = a \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (bx^2 + 2x + c) = c \end{array}\right. \Longrightarrow a = c$$
$$f(0) = a$$

☛ En $x = 1$ es $f(x) = bx^2 + 2x + c \Longrightarrow f'(x) = 2bx + 2$, si $x = 1$ es un extremo relativo $f'(1) = 0 \Longrightarrow 2b + 2 = 0 \Longrightarrow b = -1$

☛ En $x = -1$ es $f(x) = \dfrac{a}{1-x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2}$, si $f'(-1) = -1 \Longrightarrow \dfrac{a}{4} = -1 \Longrightarrow a = -4$

☛ Luego $a = -4$, $b = -1$ y $c = -4$.

Para comprobar de qué tipo de extremo hay en $x = 1$ recurrimos a la segunda derivada en esa rama $f''(x) = 2b = -2 \Longrightarrow f''(1) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 1$ es un máximo.

b) Si $a = 1$, $b = -2$, $c = 3 \Longrightarrow f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{1}{1-x} & \text{si} & x \leq 0 \\ -2x^2 + 2x + 3 & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$

☛ $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{1}{1-x} = 0$

☛ $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (-2x^2 + 2x + 3) = -\infty$

c) Si $a = 1$, $b = -2$, $c = 3 \Longrightarrow f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{1}{1-x} & \text{si} & x \leq 0 \\ -2x^2 + 2x + 3 & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (-2x^2 + 2x + 3)\,dx = \frac{-2x^3}{3} + x^2 + 3x\Big]_1^2 = \frac{4}{3}$$

Problema 3 Sea la función:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} -x^2 - 2x & \text{si} & x < 0 \\ x^3 - 6x^2 + 9x & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$$

a) Estudia si $f(x)$ es continua en $x = 0$, ¿$f(x)$ es continua en la recta real?

b) Halla los mínimos y máximos absolutos de $f(x)$ en $x \in [1, 4]$.

c) Analiza la concavidad ($\cap$) - convexidad ($\cup$) de $f(x)$ cuando $x > 0$.

d) Calcula $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:

a) ☛ Continua en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} (-x^2 - 2x) = 0 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (x^3 - 6x^2 + 9x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

☛ Como las ramas son polinomios f es continua en las dos ramas. Luego f es continua en $\mathbb{R}$.

b) Cuando $x \in [1, 4]$ la función es $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

☛ Estudiamos los extremos relativos:
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 3$

	$(1, 3)$	$(3, 4)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

En $x = 1$ hay un máximo relativo y en $x = 3$ un mínimo relativo.

☛ $f(1) = 4$, $f(3) = 0$ y $f(4) =$. Luego en $x = 3$ el mínimo es absoluto. Cuando $x = 1$ o $x = 4$ el máximo es absoluto.

c) Cuando $x > 0$ la función es $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

☛ $f''(x) = 6x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 2$

	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava $\cap$	convexa $\cup$

☛ La función es concava en el intervalo $(0, 2)$ y convexa en el $(2, \infty)$ con un punto de inflexión en $x = 2$.

d) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 9x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2}\Big]_1^2 = \frac{13}{4}$

www.matesatinet.es

Problema 4 Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 16}{x + 3}$$

a) Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ en su dominio.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$
Asíntotas:

☛ Verticales en $x = -3$:

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{2x^2 - 16}{x + 3} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{2x^2 - 16}{x + 3} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 16}{x + 3} = -\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 16}{x + 3} = +\infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x^2 - 16}{x^2 + 3x} = 2$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty}\left(\frac{2x^2 - 16}{x + 3} - 2x\right) = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{-16 - 6x}{x + 3} = -6$$

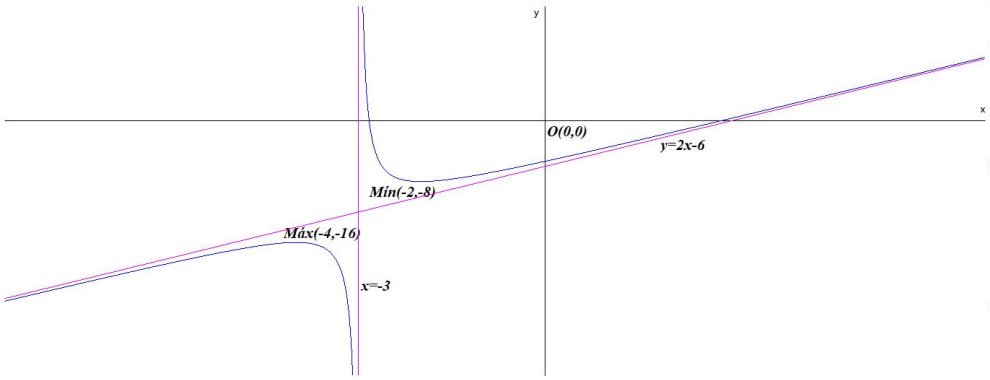
$$y = 2x - 6$$

b) $f(x) = \dfrac{2(x^2 + 6x + 8)}{(x + 3)^2} = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = -4$.

	$(-\infty, -4)$	$(-4, -2)$	$(-2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -4) \cup (-2, \infty)$ y decreciente en $(-4, -3) \cup (-3, -2)$.
La función tiene un máximo relativo en el punto $(-4, -16)$ y un mínimo relativo en el $(-2, -8)$

www.musat.net



www.inusat.info