Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2022

Problema 1 Se considera la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

a) Estudie su monotonía y calcule sus extremos.

b) Represente gráficamente la función.

c) Calcule $\int f(x)\,dx$.

d) Calcule el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

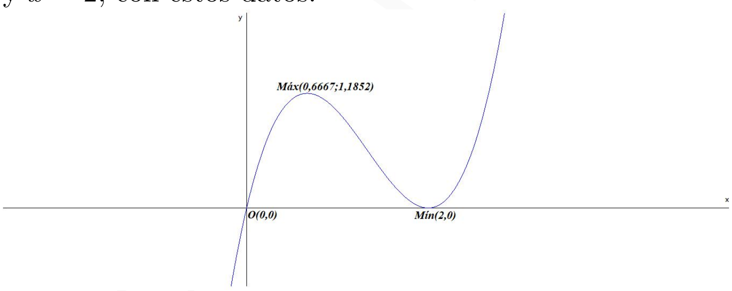
Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ y $x = 2$

	$(-\infty, 2/3)$	$(2/3, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

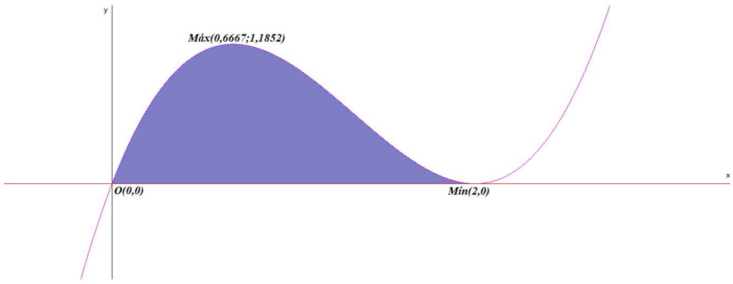
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 2/3) \cup (2, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(2/3, 2)$, tiene un máximo relativo en $x = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{32}{27}\right) = (0,6667; 1,1852)$ y un mínimo relativo en $x = 2 \Longrightarrow (2, 0)$.

b) Los puntos de corte con el eje de abscisas son $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$, con estos datos:



c) $F(x) = \int (x^3 - 4x^2 + 4x)\,dx = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4x^3}{3} + 2x^2 + C$

d) $S = \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x)\, dx = F(2) - F(0) = \frac{4}{3}\ u^2$



Problema 2 Se pide:

a) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right); \quad g(x) = x^3 e^{2x^2}$$

b) Represente gráficamente la parábola $h(x) = x^2 + x + 1$, indicando el vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.

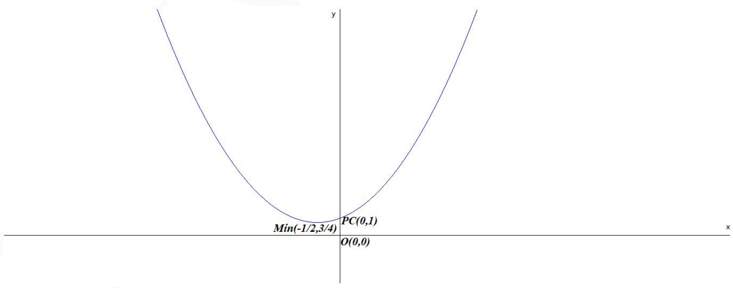
c) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $h(x) = x^2 + x + 1$, el eje de abscisas y las rectas $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 0$.

Solución:

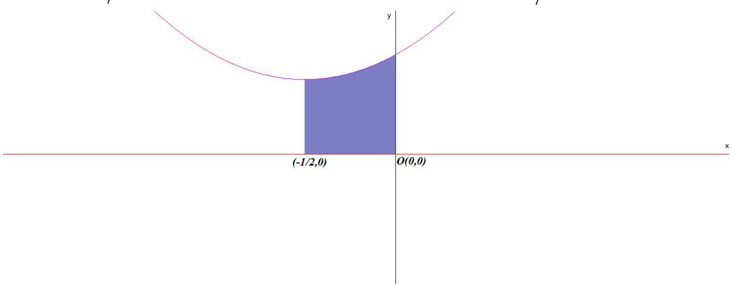
a) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+1) \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$

$g(x) = x^3 e^{2x^2} \Longrightarrow g'(x) = 3x^2 e^{2x^2} + 4x^4 e^{2x^2} = x^2 e^{2x^2}(3 + 4x^2)$

b) Punto de corte con el eje de ordenadas $x = 0 \Longrightarrow h(0) = 1 \Longrightarrow (0, 1)$. Con el eje de abscisas $h(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Longrightarrow$ no tiene solución y, por tanto, no hay puntos de corte con el eje de abscisas.
$h'(x) = 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$.
$h''(x) = 2 \Longrightarrow h''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ es un mínimo.



c) $S = \int_{-1/2}^{0} (x^2 + x + 1)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{+} x \Big]_{-1/2}^{0} = \frac{5}{12}\ u^2$



Problema 3 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio.

b) Estudie la monotonía de la función f y calcule el mínimo.

c) Calcule $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$.

Solución:

a) En la rama $x < 0$ la función vale $f(x) = 2^{x+1}$ es una exponencial y es continua y derivable en toda la rama.
En la rama $x \geq 0$ la función vale $f(x) = x^2 - 2x$ es un polinomio y es continua y derivable en toda la rama.
En $x = 0$ la función vale cero y tenemos $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

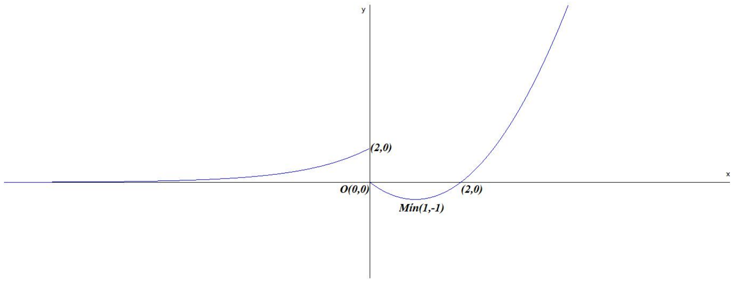
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} 2^{x+1} = 2 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

f no es continua en $x = 0$ y, por tanto, no es derivable en ese punto.
En conclusión: la función f es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) En la rama $x < 0$ tenemos $f'(x) = 2^{x+1} \ln 2 > 0 \Longrightarrow f$ es siempre creciente y no tiene extremos relativos en esta rama.
En la rama $x \geq 0$ tenemos $f'(x) = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(1, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(0, 1)$, tiene un mínimo relativo en $x = 1 \Longrightarrow (1, -1)$.



c)

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} 2^{x+1}\,dx + \int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx = \left.\frac{2^{x+1}}{\ln 2}\right]_{-2}^{0} + \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} = \frac{3}{2\ln 2} - \frac{4}{3} \simeq 0,83071$$

Problema 4 El número de diagnosticados de COVID-19 por PCR en Andalucía, medido en miles de personas, se aproxima por la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 2t - 0,3 & \text{si} \quad 0,2 \le t \le 1,8 \\ 0,1t - 0,12 & \text{si} \quad 1,8 < t \le 5 \\ -0,5t^2 + 8,3t - 28,62 & \text{si} \quad 5 < t \ge 10 \end{cases}$$

donde t es el tiempo, medido en meses, a partir del inicio de conteo en el mes de marzo de 2020.

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio.

b) ¿En qué instante o instantes es máximo el número de diagnosticados? ¿Cuál es ese número?

Solución:

a) Las tres ramas son polinómicas y son continuas y derivables. Habrá que analizar su comportamiento en $t = 1,8$ y $t = 5$.
Continuidad en $t = 1,8$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \longrightarrow 1,8^-} f(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow 1,8^-} (-t^2 + 2t - 0,3) = 0,06 \\ \lim\limits_{t \longrightarrow 1,8^+} f(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow 1,8^+} (0,1t - 0,12) = 0,06 \\ f(1,8) = 0,06 \end{cases} \Longrightarrow f \text{ continua}$$

Continuidad en $t = 5$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \longrightarrow 5^-} f(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow 5^-} (0,1t - 0,12) = 0,38 \\ \lim\limits_{t \longrightarrow 5^+} f(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow 5^+} (-0,5t^2 + 8,3t - 28,62) = 0,38 \\ f(5) = 0,38 \end{cases} \Longrightarrow f \text{ continua}$$

Luego la función es continua en el intervalo $[0,2;10]$.
La derivada es:

$$f(t) = \begin{cases} -2t+2 & \text{si} \quad 0,2 < t < 1,8 \\ 0,1 & \text{si} \quad 1,8 < t < 5 \\ -t+8,3 & \text{si} \quad 5 < t < 10 \end{cases}$$

Derivable $t = 1,8$: $f'(1,8^-) = -1,6 \neq f'(1,8^+) = 0,1 \Longrightarrow f$ no es derivable en $t = 1,8$.
Derivable $t = 5$: $f'(5^-) = 0,1 \neq f'(5^+) = 3,3 \Longrightarrow f$ no es derivable en $t = 5$.
Luego la función es derivable en el intervalo $(0,2;1,8) \cup (1,8;5) \cup (5,10)$.

b) Hacemos $f'(t) = 0$
En la rama $(0,2;1,8) \Longrightarrow f'(t) = -2t+2 = 0 \Longrightarrow t = 1$. Como $f''(t) = -2 \Longrightarrow f''(1) = -2 < 0 \Longrightarrow t = 1$ es un máximo relativo $(1, f(1)) = (1;0,7)$
En la rama $(1,8;5) \Longrightarrow f'(t) = 0,1 \neq 0 \Longrightarrow$. No hay extremos.
En la rama $(5;10) \Longrightarrow f'(t) = -t+8,3 = 0 \Longrightarrow t = 8,3$. Como $f''(t) = -1 \Longrightarrow f''(8,3) = -1 < 0 \Longrightarrow t = 8,3$ es un máximo relativo $(8,3; f(8,3)) = (8,3;5,825)$
Además tenemos que comprobar los valores en los bordes de los intervalos y tendremos:

$$f(0,2) = 0,06, \quad f(1) = 0,7, \quad f(1,8) = 0,06, \quad f(5) = 0,38, \quad f(8,3) = 5,825, \quad f(10) = 4,38$$

El máximo se encuentra a los 8,3 meses con 5825 personas infectadas.