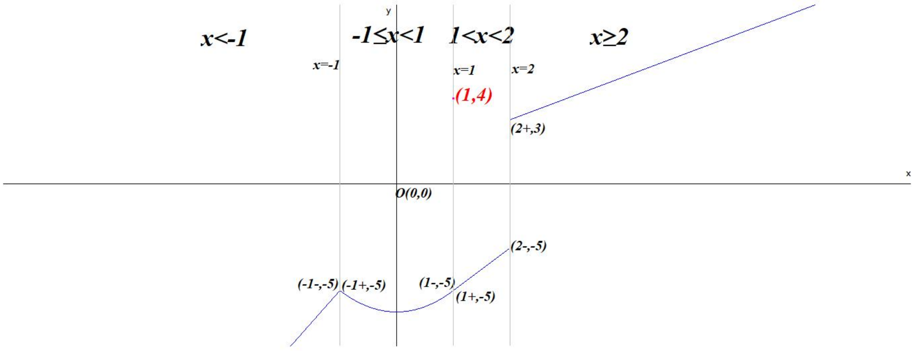
Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Febrero 2022

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 - 6 & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad x = 1 \\ 2x - 7 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ x + 1 & \text{si} \quad 2 \leq x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 5ax^2 - bx + 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x^2 + 3bx - a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (5ax^2 - bx + 2) = 5a - b + 2$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (2x^2 + 3bx - a) = 2 + 3b - a$$

$$5a - b + 2 = 2 + 3b - a \Longrightarrow 3a - 2b = 0$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 10ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 4x + 3b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 10a - b; \;\; f'(1^+) = 4 + 3b \Longrightarrow 10a - b = 4 + 3b \Longrightarrow 5a - 2b = 2$$

$$\begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ 5a - 2b = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3/2 \end{cases}$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x - a}{2} & \text{si} \quad x < -1 \\ x + a & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ \dfrac{bx - 2}{2} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{3x - a}{2} = \dfrac{-3 - a}{2} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (x + a) = -1 + a \end{cases} \Longrightarrow \frac{-3 - a}{2} = -1 + a \Longrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

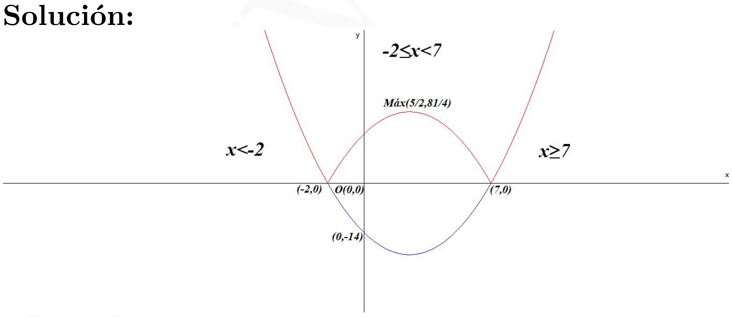
Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (x + a) = 1 + a \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{bx - 2}{2} = \dfrac{b - 2}{2} \end{cases} \Longrightarrow 1 + a = \frac{b - 2}{2} \Longrightarrow 2a - b = -4$$

$$\begin{cases} a = 1/3 \\ 2a - b = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = 14/3 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 5x - 14|$ y representarla gráficamente.

Solución:



Hacemos $g(x) = x^2 - 5x - 14 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 5/2$:

x	y
0	-14
-2	0
7	0
$-5/2$	$-81/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(-\dfrac{81}{4}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{81}{4}\right)$.
La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{81}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - 5x - 14 & \text{si} & x \le -2 \\ -(x^2 - 5x - 14) & \text{si} & -2 < x \le 7 \\ x^2 - 5x - 14 & \text{si} & 7 \le x \end{array} \right.$$

f es continua en $x = -2$:

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^-} (x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^+} (-x^2 + 5x + 14) = 0$$

$$f(-2) = 0$$

y f es continua en $x = 7$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^-} (-x^2 + 5x + 14) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 7^+} (x^2 - 5x - 14) = 0$$

$$f(7) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x - 5 & \text{si} & x \le -2 \\ -2x + 5 & \text{si} & -2 < x \le 7 \\ 2x - 5 & \text{si} & 7 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = -2$: $f'(-2^-) = -9$ y $f'(-2^+) = 9$, luego no es derivable en $x = -2$.
Derivabilidad en $x = 7$: $f'(7^-) = -9$ y $f'(7^+) = 9$, luego no es derivable en $x = 7$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-2, 7\}$.

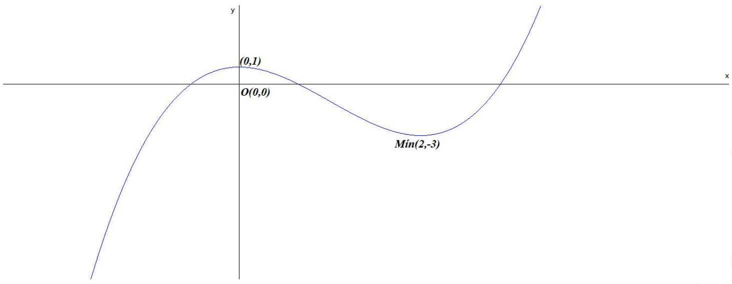
Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene un extremo en el punto $(2, -3)$.

Decidir de que extremo se trata.
Solución:

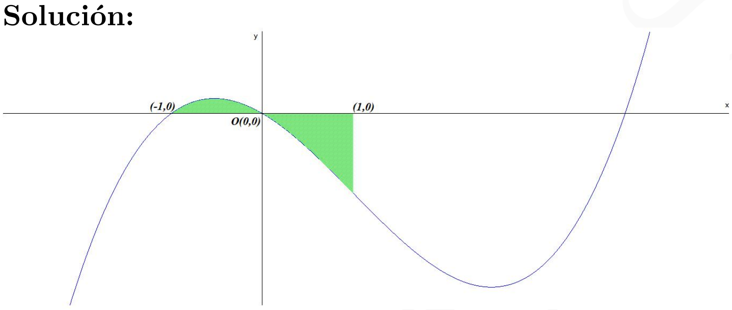
$$f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 6ax + b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow c = 1 \\ f(2) = -3 \Longrightarrow 8 - 12a + 2b + c = -3 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12 - 12a + b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{array}\right.$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
$f'(x) = 3x^2 - 6x$ y $f''(x) = 6x - 6 \Longrightarrow f''(2) = 6 > 0 \Longrightarrow x = 2$ es un mínimo.



Problema 6 Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$, encontrar el área encerrada por ella, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
Solución:



$$x^3 - 3x^2 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = -1 \text{ y } x = 4$$

Tendremos dos áreas a calcular S_1 con los límites de integración entre -1 y 0, y otra S_2 entre 0 y 1.

$$F(x) = \int (x^3 - 3x^2 - 4x)\, dx = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2$$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\, dx = F(0) - F(-1) = \frac{3}{4}, \;\; S_2 = \int_{0}^{1} f(x)\, dx = F(1) - F(0) = -\frac{11}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{3}{4} + \frac{11}{4} = \frac{7}{2} \simeq 3,5 \; u^2$$