Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2021

Problema 1 *(2 puntos)*Discute el siguiente sistema en función del parámetro a.

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x - ay + 2az = 5 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Resuelve el sistema si $a = 1$.

Solución:

- $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 2 & -a & 2a & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$; $|A| = 2a^2 - 3a = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = \dfrac{3}{2}$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq \dfrac{3}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =nº incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)

- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Luego el sistema es incompatible (no tiene solución)

- Si $a = \dfrac{3}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 0 & 1 \\ 2 & -3/2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & -9/2 & 3 & 3 \\ 0 & 3/2 & -1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & -9/2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + 2F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ -3y + 6 = 3 \Longrightarrow y = 1 \\ x + 1 = 1 \Longrightarrow x = 0 \end{cases}$$ Luego: $x = 0$, $y = 1$ y $z = 3$.

Problema 2 *(2 puntos)*Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ x & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} z & 8 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 2.
Calcula, justificando la respuesta, los valores de x, y y z para que se verifique que $A^tB = I + C$ siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Solución:
$A^tB = I+C \Longrightarrow = \begin{pmatrix} 2 & x \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 8 \\ 15 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3x-2 & 4x+2y \\ 15 & 16-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+1 & 8 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} 3x-2 = z+1 \\ 4x+2y = 8 \\ 16-3y = 10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 3 *(2 puntos)*Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la inversa de la matriz $A - B$.

b) Calcula la matriz X de dimensión 2×3, que satisface la ecuación $XA + C = XB$.

c) ¿Es posible hacer el producto BC? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto CB? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué.

Solución:

a) $(A-B)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$
$(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $XA + C = XB \Longrightarrow XA - XB = -C \Longrightarrow X(A-B) = -C \Longrightarrow$
$X = -C(A-B)^{-1} = -\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1/3 & -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}$

c) $\underset{3\times3}{B} \cdot \underset{2\times3}{C} \Longrightarrow$ no se pueden multiplicar, el número de columnas de B es distinto del número de filas de C.
$\underset{2\times3}{C} \cdot \underset{3\times3}{B} = \underset{2\times3}{CB} \Longrightarrow$ si se pueden multiplicar, el número de columnas de C es igual al número de filas de B.
$CB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 13 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

Problema 4 *(2 puntos)*Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar la expresión general de A^n. Demostrar que la inversa de A^n es $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Encuentra la matriz X que satisface la ecuación matricial $A^{10}X - A^{20} = A$.

Solución:

a) $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$|A^n| = 1,\ Adj(A^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (Adj(A^n))^t = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A^n)^{-1} = \dfrac{(Adj(A^n))^t}{|A^n|} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{10}X - A^{20} = A \Longrightarrow A^{10}X = A + A^{20} \Longrightarrow X = (A^{10})^{-1}(A + A^{20}) = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Problema 5 *(2 puntos)*Tres estudiantes de Economía, Cristina, Juan y Pedro, han preparado un trabajo de investigación que deben exponer en clase. Se repartieron las tareas de la siguiente forma: Cristina llevó a cabo la labor de recopilación de datos, en la que empleó un 40 % más que el tiempo que Juan necesitó para redactar el texto. Pedro desempeñó las tareas de revisión y de preparación de la exposición, siendo el tiempo dedicado a ello la mitad del empleado en total por Cristina y Juan.
El tiempo total empleado fue de 18 horas. ¿Cuánto dedicó cada alumno a la elaboración del trabajo?

a) Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el tiempo empleado por cada estudiante.

b) Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

c) Resolverlo.

Solución:

a) Sea x el tiempo empleado por Cristina, y el tiempo empleado por Juan y z el tiempo empleado por Pedro.

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1,4y \\ z = \dfrac{1}{2}(x+y) \\ x+y+z = 18 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z = 18 \\ 5x-7y = 0 \\ x+y-2z = 0 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 5 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & -12 & -5 & -90 \\ 0 & 0 & -3 & -18 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible determinado. Solución única.

c) $z = \dfrac{18}{3} = 6$, $-12y - 30 = -90 \Longrightarrow y = \dfrac{60}{12} = 5$ y $x + 5 + 6 = 18 \Longrightarrow x = 7$
Cristina emplea 7 horas, Juan emplea 5 horas y Pedro 6 horas.