

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)
Noviembre 2021

Problema 1 (2 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y - az = 1 \\ x + 2y - 2z = -2 \end{cases}$$

- a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a .
b) Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right); \quad |A| = 4a - 5 = 0 \implies a = \frac{5}{4}$$

- Si $a \neq \frac{5}{4} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^o$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = \frac{5}{4}$:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5/4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \\ &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -9/4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - 4F_2 \end{bmatrix} = \\ &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -9/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array} \right) \implies \text{Sistema Incompatible} \end{aligned}$$

b) Si $a = 1$:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ x + 2y - 2z = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \\ z = 9 \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular la matriz $Y = A^2 + BB^t$ donde B^t es la matriz traspuesta de B .
- b) Determinar la matriz X para que se verifique la ecuación $2AX = B$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } Y = A^2 + BB^t &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{b) } 2AX = B &\implies X = \frac{1}{2}A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Problema 3 (2 puntos) Considera las siguientes matrices:

$$M = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Razona si es posible calcular los productos MN y M^2 . En caso de que lo sea, Calcular los mismos.
- b) Estudia para qué valores de k es MN invertible.
- c) Calcular la inversa de MN para $k = 1$.
- d) Para $k = 1$, Calcular la matriz X que cumple $(MN)X = B$ con $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

- a) $M \cdot N = MN \implies$ el producto es posible hacerlo y su resultado es una matriz 2×2 .
 $M^2 = M \cdot M \implies$ el producto no es posible hacerlo, ya que el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda.
- b) $MN = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2k-1 \\ -7k & 9k+5 \end{pmatrix}$
- c) $|MN| = k(23k-2) = 0 \implies k = 0$ y $k = \frac{2}{23} \implies \exists A^{-1} \forall k \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{2}{23}\right\}$
- d) Si $k = 1$: $MN = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} \implies (MN)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/21 \\ 1/3 & 1/21 \end{pmatrix}$

$$e) (MN)X = B \implies X = (MN)^{-1}B = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/21 \\ 1/3 & 1/21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/21 \\ 2/3 & 1/21 \end{pmatrix}$$

Problema 4 (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $(B - A)^{-1}$.

b) Calcula la matriz X , que verifica $2X - AB = BA$.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones: $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$a) (B - A)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) 2X - AB = BA \implies X = \frac{1}{2}(BA + AB) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ 5/2 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Se trata de un sistema homogéneo y el sistema es siempre compatible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies |C| = 0 \implies$$

Sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Problema 5 (2 puntos) Un museo ofrece entradas con tarifas distintas: adulto, niño y jubilado. La suma de adulto y jubilado es cinco veces la tarifa de niño. Además, se sabe que un grupo de 5 adultos, 3 niños y 3 jubilados, ha pagado 222€; y otro grupo de 3 adultos, 2 niños y 4 jubilados, 168€.

a) Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las tres tarifas.

b) Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

c) Resolverlo.

d) El día que una familia formada por 2 adultos, 2 niños y 3 jubilados visita el museo, se ha aplicado un descuento especial de un 15 % a cada tarifa. ¿Cuánto pagan en total?

Solución:

a) Sea x el precio de una entrada de adulto, y el precio de una entrada de niño y z el precio de una entrada de jubilado.

$$\begin{cases} x + z = 5y \\ 5x + 3y + 3z = 222 \\ 3x + 2y + 4z = 168 \end{cases} \implies \begin{cases} x - 5y + z = 0 \\ 5x + 3y + 3z = 222 \\ 3x + 2y + 4z = 168 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 222 \\ 3 & 2 & 4 & 168 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & -2 & 222 \\ 0 & 17 & 1 & 168 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 28F_3 - 17F_2 \end{array} \right] \\ &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & -2 & 222 \\ 0 & 0 & 62 & 930 \end{array} \right) \implies \text{sistema compatible determinando. Solución única.} \end{aligned}$$

$$\text{c) } z = \frac{930}{62} = 15, 28y - 30 = 222 \implies y = \frac{252}{28} = 9 \text{ y } x - 45 + 15 = 0 \implies x = 30$$

La entrada de adulto cuesta 30€, la de niño 9€ y la de jubilado 15€.

d) Un día sin oferta la familia pagaría $2 \cdot 30 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 15 = 123$ €. Si se ha aplicado un 15 % de descuento a las tres entradas, la familia ha pagado $123 \cdot 0,85 = 104,55$ €.