Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2021

Problema 1 *(2,5 puntos)*Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot C + D^T$.

b) Razona si A y B tienen matriz inversa (no es necesario calcularlas).

c) ¿Qué dimensiones tienen las matrices resultantes de los productos $D \cdot C$ y $D^T \cdot C^T$? (no es necesario hacer las multiplicaciones).

Solución:

a) $A \cdot C + D^T = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 11/3 \end{pmatrix}$

b) $|A| = 6 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$
$|B| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$

c) $\underset{1\times 2}{D} \cdot \underset{2\times 1}{C} = \underset{1\times 1}{D \cdot C}$
$\underset{2\times 1}{D^T} \cdot \underset{1\times 2}{C^T} = \underset{2\times 2}{D^T \cdot C^T}$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Un bar realiza todas las semanas un pedido de cerveza y vino a uno de sus dos proveedores. El proveedor A le vende la cerveza a un euro el litro y el vino a dos euros el litro. El proveedor B le vende la cerveza al mismo precio que el A, pero el litro de vino se lo vende a m euros. Si realiza el pedido semanal al proveedor A paga 1000 euros, mientras que si lo realiza al proveedor B paga $500m$ euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean los litros de cerveza y vino, respectivamente, comprados cada semana.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que el precio del litro de vino en el proveedor B sea también de dos euros? En caso afirmativo, ¿cuánto vino compra por semana, si el pedido semanal de cerveza es de 400 litros? Determina la cantidad de cerveza y vino comprada semanalmente en cualquier otro caso, es decir, cuando el precio del litro de vino en el proveedor B no sea de dos euros.

Solución:

a) Sea x litros de cerveza e y litros de vino.

$$\begin{cases} x + my = 500m \\ x + 2y = 1000 \end{cases}$$

b) $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & 500m \\ 1 & 2 & 1000 \end{array} \right)$ con $|A| = 2 - m = 0 \Longrightarrow m = 2$

- ☛ Si $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2 =$Rango$(A) =n^{\underline{o}}$ de incognitas y el sistema es compatible determinado (solución única)

- ☛ Si $m = 2$: $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1000 \\ 1 & 2 & 1000 \end{array} \right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)
  $x + 2y = 1000 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1000 - 2\lambda \\ y = \lambda \end{array} \right.$

- ☛ El sistema siempre tiene solución. Cuando $m \neq 2$ es única y cuando $m = 2$ infinitas.
  Luego si es posible que el vino valga 2 euros.
  Si se piden, en este último caso, 400 litros de cerveza: $400 = 1000 - 2\lambda \Longrightarrow y = \lambda = 300$ litros de vino.
  Si $m \neq 2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + my = 500m \\ x + 2y = 1000 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 500 \end{array} \right.$

Problema 3 *(2,5 puntos)*Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = a \\ ax + 2y - z = 3a \\ 2x + ay - z = 6 \end{array} \right.$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ a & 2 & -1 & 3a \\ 2 & a & -1 & 6 \end{array} \right); \quad |A| = 2a - a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0, \quad a = 2$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ n$^{\underline{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 2x + 2y - z = 6 \\ 2x + 2y - z = 6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left\{\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{array}\right.$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con m un parámetro real.

a) ¿Para qué valores del parámetro m existe la matriz inversa de A?

b) Para $m = 2$, resuelva la ecuación matricial $XA - A^2 = I_3$.

Solución:

a) $|A| = -2m^2 + 3m + 5 = 0 \Longrightarrow m = -1$ y $m = \dfrac{5}{2} \Longrightarrow \exists\, A^{-1} \ \ \forall m \in \mathbb{R} - \left\{-1, \dfrac{5}{2}\right\}$

b) Si $m = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & -1/3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4/3 & -1 & 2/3 \end{pmatrix}$

$$XA - A^2 = I_3 \Longrightarrow XA = I_3 + A^2 \Longrightarrow X = (I_3 + A^2)A^{-1} = I_3A^{-1} + AAA^{-1} =$$

$$A^{-1} + A = \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & -1/3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4/3 & -1 & 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 5/3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$