

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)

Noviembre 2021

Problema 1 (2,5 puntos) Una carpintería ofrece tres modelos de mesas cuyo precio varía en función del tipo de madera utilizada y lo clasifica en: gama baja, media y superior. El precio de la mesa de gama superior es el mismo que de las otras dos juntas. Vendiendo 50 mesas de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 de la superior y por la venta de 5 mesas de gama baja, 5 de media y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo de mesa.
- b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

- a) Sea x el número de mesas de gama baja, y el número de mesas de gama media y z el número de mesas de gama superior.

$$\begin{cases} x + y = z \\ 50y = 30z \\ 5x + 5y + 10z = 7500 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 1500 \end{cases}$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1500 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1500 \end{array} \right) \implies \text{siste-}$

ma compatible determinado. Solución única:

$$z = \frac{1500}{3} = 500, \quad 5y - 1500 = 0 \implies y = \frac{1500}{5} = 300 \quad \text{y} \quad x + 300 - 500 = 0 \implies x = 200$$

Se venden a 200€ las mesas de gama baja, a 300€ las mesas de gama media y a 500€ las mesas de gama alta.

Problema 2 (2,5 puntos) Se pide:

- a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ comprueba que $(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$.
- b) Resuelve la ecuación $M \cdot X = N$

Solución:

$$\begin{aligned}
\text{a) } (M \cdot N)^{-1} &= \left(\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \\
M^{-1} \cdot N^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \\
\text{Luego } (M \cdot N)^{-1} &= N^{-1} \cdot M^{-1} \\
\text{b) } M \cdot X &= N \implies X = M^{-1}N = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Problema 3 (2,5 puntos) Un hotel compra azúcar y sal a su proveedor habitual. El azúcar lo compra a $7m$ euros el kilogramo y la sal a $2m$ euros el kilogramo. La última compra ha sido de 22,5 kilogramos en total, entre azúcar y sal, y por ella ha pagado $98m$ euros.

- Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades de azúcar y de sal compradas.
- Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que el precio de la sal fuese 0,2 euros por kilogramo? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el precio de la sal. ¿Cuántos kilogramos compró de azúcar en tal caso?

Solución:

- Sea x la cantidad de azúcar e y la cantidad de sal.

$$\begin{cases} 7mx + 2my = 98m \\ x + y = 22,5 \end{cases}$$

$$\text{b) } A = \left(\begin{array}{cc|c} 7m & 2m & 98m \\ 1 & 1 & 22,5 \end{array} \right) \text{ con } |A| = 5m = 0 \implies m = 0$$

- Si $m \neq 0 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(A) = n^o$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado (solución única)

La respuesta es afirmativa:

$$\begin{cases} 0,7x + 0,2y = 9,8 \\ x + y = 22,5 \end{cases} \implies \begin{cases} 7x + 2y = 98 \\ x + y = 22,5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 53/5 \simeq 10,6 \\ y = 119/10 \simeq 11,9 \end{cases}$$

Si el precio de la sal es 0,2 euros por kg tenemos $2m = 0,2 \implies m = 0,1 \implies m \neq 0 \implies$ compró 10,6 kg de azúcar y 11,9 kg de sal.

- Si $m = 0$: $A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 22,5 \end{array} \right) \implies$ sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones) En nuestro caso sería absurdo, el precio de la sal y del azúcar serían cero euros.

Problema 4 (2,5 puntos) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ m & 3 \end{pmatrix}$.

a) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 3X + 2Y = A \\ -4X + Y = B \end{cases}$$

b) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz C ?

c) Para $m = 1$, calcule la matriz inversa de C .

Solución:

a)

$$\begin{cases} 3X + 2Y = A \\ -4X + Y = B \end{cases} \implies \begin{cases} 3X + 2Y = A \\ 8X - 2Y = -2B \end{cases} \implies 11X = A - 2B \implies$$

$$X = \frac{1}{11}(A - 2B) \implies X = \frac{1}{11} \left[\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3X + 2Y = A \\ -4X + Y = B \end{cases} \implies \begin{cases} 12X + 8Y = 4A \\ -12X + 3Y = 3B \end{cases} \implies 11Y = 4A + 3B \implies$$

$$Y = \frac{1}{11}(4A + 3B) \implies Y = \frac{1}{11} \left[4 \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) |C| = 12 - 6m = 0 \implies m = 2 \implies \exists C^{-1} \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{2\}.$$

$$c) \text{ Para } m = 1 \implies C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \implies C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$