Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Febrero 2022

Problema 1 Dados los puntos $A(1,1,0)$ y $B(0,0,2)$ y la recta $r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$ Halla:

a) Un punto $C\in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en B.

b) El plano π que pasa por A y B y es paralelo a r.

Solución:

a) $C\in r\Longrightarrow C(1,1+\lambda,1+\lambda)$, $\overrightarrow{BA}=(1,1,-2)$ y $\overrightarrow{BC}=(1,1+\lambda,\lambda-1)$. Como $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}\Longrightarrow\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Longrightarrow 1+(1+\lambda)-2(\lambda-1)=0\Longrightarrow\lambda=4\Longrightarrow C(1,5,5)$

b) $r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\\ P_r(1,1,1)\end{cases}$ y $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,2)$

$$\pi:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\\ \overrightarrow{AB}=(-1,-1,2)\\ B(0,0,2)\end{cases}\Longrightarrow\pi:\begin{vmatrix} x & y & z-2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0\Longrightarrow$$

$$\pi:3x-y+z-2=0$$

Problema 2 Sean el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r:\begin{cases}x+y+z=0\\ x+z=0\end{cases}$ Calcula:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r.

b) La distancia de r a P y el punto $Q\in r$ donde se alcanza dicha distancia.

c) La ecuación del plano π que contiene a r y está a la misma distancia de P que r.

Solución:

a) $r:\begin{cases}x+y+z=0\\ x+z=0\end{cases}\Longrightarrow r:\begin{cases}x=-\lambda\\ y=0\\ z=\lambda\end{cases}\Longrightarrow r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(-1,0,1)\\ P_r(0,0,0)\end{cases}$

b) $\overrightarrow{P_rP}=(1,0,1)$

$$\left|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}\right|=|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}|=|2(0,1,0)|=2$$

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}\right|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\ u^2$$

Sea $Q(-\lambda, 0, \lambda)$ y $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = |(-\lambda, 0, \lambda) - (1, 0, 1)| = |(-\lambda - 1, 0, \lambda - 1)| =$
$\sqrt{(-\lambda - 1)^2 + (\lambda - 1)^2} = \sqrt{2} \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow Q(0, 0, 0)$

c) $d(P, \pi) = d(Q, P) = \left|\overrightarrow{QP}\right| = |(1, 0, 1)| = \sqrt{2}$
Por otra parte el vector $\overrightarrow{QP}$ es perpendicular a $\pi \Longrightarrow \pi : x + z + \lambda = 0$ y $Q \in \pi \Longrightarrow 0 + 0 + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi : x + z = 0$

Problema 3 Se dispara un misil en línea recta desde el punto $A = (1, 2, 8)$ hacia la posición de la base enemiga $B = (3, 4, 0)$.

a) Calcula la ecuación de la recta que contiene la trayectoria del misil.

b) Calcula el punto en el que el misil cruza el plano $z = 4$.

c) Calcula la distancia que recorre el misil desde que se lanza hasta que impacta en B.

d) Calcula un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (2, 2, -8) = 2(1, 1, -4) \\ P_r = B(3, 4, 0) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -4\lambda \end{array} \right.$

b) Sustituyendo r en el plano $z = 4 \Longrightarrow 0 + 0 + (-4\lambda) = 4 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow P(2, 3, 4)$

c) $d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(2, 2, -8)| = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}\ u$

d) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{AB} = (3, 4, 0) \times (1, 1, -4) = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{array} \right| = (-16, 12, -1).$

Problema 4 Considera el plano $\pi : 2x + 3y - 4z = 10$ y los puntos $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 3, 3)$.

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

b) Halla el vector normal del plano π.

c) Determina la posición relativa del plano π, y la recta que pasa por los puntos A y B.

d) Halla la ecuación del plano paralelo a π que contiene al punto A.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (1,1,2) \\ P_r = A(1,2,1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{u_\pi} = (2,3,-4)$

c) Sustituimos r en π:

$$2(1+\lambda) + 3(2+\lambda) - 4(1+2\lambda) = 10 \Longrightarrow \lambda = -2$$

Luego la recta corta al plano π en el punto $H(-1,0,-3)$. Son secantes.

d) Un plano π' paralelo a π tiene de ecuación $2x+3y-4z = \lambda$ imponiendo $A \in \pi' \Longrightarrow 2+6-4 = 4 = \lambda \Longrightarrow \pi' : 2x+3y-4z = 4$