

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)

Diciembre 2021

Problema 1 Sean los vectores $\vec{u} = (m, 0, m)$, $\vec{v} = (2, m, -m)$ y $\vec{w} = (3, 1, 0)$. Calcular m de forma que los vectores sean linealmente dependientes.

Solución:

$$\begin{vmatrix} m & 0 & m \\ 2 & m & -m \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2m^2 + 2m = 0 \implies m = 0, m = 1$$

Si $m = 1$ o $m = 0$ los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

Problema 2 Se pide:

- Calcular m para que los vectores $\vec{u} = (2m, -m, 3)$ y $\vec{v} = (1, 2, m - 2)$ sean perpendiculares.
- Encontrar un vector perpendicular $\vec{u} = (1, -1, 5)$ y a $\vec{v} = (1, 0, -2)$ que tenga módulo 5.
- Decidir si los vectores $\vec{u} = (1, -3, 2)$ y $\vec{v} = (-1, -1, -1)$ son perpendiculares.

Solución:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2m - 2m + 3m - 6 = 0 \implies m = 2$

b)

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (2, 7, 1) \implies |\vec{w}| = 3\sqrt{6}$$

$$\vec{t} = \frac{5}{3\sqrt{6}}(2, 7, 1) = \left(\frac{5\sqrt{6}}{9}, \frac{35\sqrt{6}}{18}, \frac{5\sqrt{6}}{18} \right)$$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 + 3 - 2 = 0 \implies \vec{u} \perp \vec{v}$

Problema 3 Sean los vectores $\vec{u} = (1, 1, 3)$, $\vec{v} = (0, -1, 1)$ y $\vec{w} = (1, 3, 0)$. Calcular:

- Volumen de paralelepípedo que determinan.
- Área de la base determinada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y la altura del paralelogramo sobre el vector $\vec{v}$.

- c) Altura del paralelepípedo.
- d) Volumen del tetraedro que determinan.
- e) Área de la base del tetraedro determinada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y la altura del triángulo sobre el vector $\vec{v}$.
- f) Altura del tetraedro.

Solución:

a)

$$V_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 u^3$$

b)

$$S_p = |\vec{u} \times \vec{v}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right| = |(4, -1, -1)| = 3\sqrt{2} u^2$$

$$S_p = |\vec{v}| \cdot h_p \implies h_p = 3 u$$

c)

$$V_p = S_p \cdot H_p \implies H_p = \frac{1}{3} u$$

d)

$$V_t = \frac{1}{6} u^3$$

e)

$$S_t = \frac{3\sqrt{2}}{2} u^2, \quad h_t = h_p = 3 u$$

f)

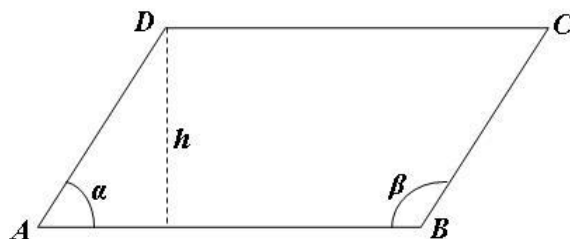
$$H_t = H_p = \frac{1}{3} u$$

Problema 4 Sean los puntos $A(-1, 0, -2)$, $B(3, 1, 2)$ y $C(8, 5, 8)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

- a) Encontrar el 4º vértice D .
- b) Calcular la longitud de sus lados.
- c) Calcular sus ángulos y su centro.
- d) Calcular el punto simétrico de A respecto de C .

e) Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.

Solución



a) $D = A + \overrightarrow{BC} = (-1, 0, -2) + (5, 4, 6) = (4, 4, 4).$

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(4, 1, 4)| = \sqrt{33}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(4, 4, 4)| = 4\sqrt{3}$

c)

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{36}{\sqrt{33} \cdot 4\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 25^\circ 14' 22'' \text{ y } \beta = 154^\circ 45' 38''$$

El centro es $M\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)$

d) $C = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow A' = 2C - A = (17, 10, 18)$

e)

$$\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(9, 5, 10) = \left(3, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

$$A_1 = A + \vec{u} = (-1, 0, -2) + \left(3, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right) = \left(2, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$A_2 = A_1 + \vec{u} = \left(2, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) + \left(3, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right) = \left(5, \frac{10}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

$$C = A_3 = A_2 + \vec{u} = \left(5, \frac{10}{3}, \frac{14}{3}\right) + \left(3, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right) = (8, 5, 8)$$