Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2021

Problema 1 *(2,5 puntos)*Discutir el sistema y resolver en los casos compatibles

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y+z=a \\ 2x+y+2z=2a \\ 2x+y+3z=3 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right),\ |A|=0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right|=1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2.$$

$$|A_4|=\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2a \\ 1 & 3 & 3 \end{array}\right|=3-3a=0\Longrightarrow a=1$$

- Si $a\neq 1 \Longrightarrow |A_4|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3\neq \text{Rango}(A)=2 \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.
- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-2F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 2x+y+3z=3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=1 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Dada la matriz $A=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{array}\right)$, calcula:

a) Su rango.

b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes.

c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes.

Solución:

a) $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3.$

b) Por ser el rango 3 y tener cuatro columnas una de ellas debe de ser combinación de las otras. Por ejemplo: $C_2 = 0C_1 + 3C_3 + 0C_4 = 3C_3$.

c) Como el rango es 3 las tres filas son linealmente independientes. No se puede obtener una fila por combinación lineal de las otras.

Problema 3 *(2,5 puntos)*Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) Si existe, su inversa.

b) La matriz X cuadrada de orden 3 que verifica:
$(X + A)^2 - X^2 - XA = I_3$ (I_3 matriz identidad de orden 3).

Solución:

a) $|A| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $(X + A)^2 - X^2 - XA = X^2 + A^2 + 2XA - X^2 - XA = A^2 + XA = I_3 \Longrightarrow$
$(A + X)A = I_3 \Longrightarrow\Longrightarrow A + X = A^{-1} \Longrightarrow X = A^{-1} - A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} -$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Una empresa fabrica tres tipos de bombillas: A, B y C. B tiene 20 puntos LED, y la tipo C tiene 50 puntos LED. El número de bombillas de 10 puntos LED fabricadas diariamente es λ veces el número de bombillas de 50 puntos LED. A la empresa le interesa saber cuantas bombillas de cada tipo pueden fabricar diariamente.

a) Si $\lambda = 2$, y esta empresa usa, diariamente, 30000 puntos LED con los que fabrica 1300 bombillas:

i. Plantea el sistema de ecuaciones lineales de este leyblema.

ii. Clasifica el sistema de ecuaciones lineales y, si es posible, determina cuántas bombillas de cada tipo se pueden fabricar.

b) Si $\lambda = 3$, y la empresa fabrica diariamente 1.000 bombillas; clasifica el sistema de ecuaciones lineales y determina el número de puntos LED necesarios.
En este caso, cuantas bombillas de cada tipo se pueden fabricar?

Solución:
Sea x el número de bombillas tipo A, y el número de bombillas tipo B y z el número de bombillas tipo C. Y tenemos $x = \lambda z$

a) Si $\lambda = 2$:

i. $$\begin{cases} x = 2z \\ 10x + 20y + 50z = 30000 \\ x + y + z = 1300 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1300 \\ x + 2y + 5z = 3000 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

ii. $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1300 \\ 1 & 2 & 5 & 3000 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ $=$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado.

$$\begin{cases} x + y + z = 1300 \\ x + 2y + 5z = 3000 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 800 \\ y = 100 \\ z = 400 \end{cases}$$

b) Si $\lambda = 3$, 1000 bombillas y μ puntos LED:

$$\begin{cases} x = 3z \\ 10x + 20y + 50z = \mu \\ x + y + z = 1000 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1000 \\ x + 2y + 5z = \mu/10 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 1 & 2 & 5 & \mu/10 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & 4 & \mu/10 - 1000 \\ 0 & -1 & -4 & -1000 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & 4 & \mu/10 - 1000 \\ 0 & 0 & 0 & -2000 + \mu/10 \end{array}\right); \quad -2000 + \mu/10 = 0 \Longrightarrow \mu = 20000$$

☛ Si $\mu = 20000$ el sistema es compatible indeterminado. (Infinitas soluciones)

$$\begin{cases} x + y + z = 1000 \\ x + 2y + 5z = 2000 \\ x - 3z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1000 \\ x - 3z = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1000 - 4t \\ z = t \end{cases}$$

Como x, y y z tienen que ser números enteros mayores de cero $1000 - 4t \geq 0 \Longrightarrow t \geq 250$ y $t \in \mathbb{Z}$.

- ☛ Si $\mu \neq 20000$ el sistema es incompatible. (No tiene solución)