Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Noviembre 2021

Problema 1 *(2,5 puntos)*Sea k un parámetro real y considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ 2x+3y+kz=3 \\ x+ky+3z=2 \end{array}\right.$$

Determine los valores del parámetro real k, para lo que ese sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{array}\right),\ |A|=-(k^2+k-6)=0 \Longrightarrow k=-3 \text{ y } k=2.$$

- Si $k\neq -3$ y $k\neq 2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $k=-3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+4F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $k=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Se pide:

a) Resuelva el siguiente sistema matricial

$$\left\{\begin{array}{l} 2X+3Y=\left(\begin{array}{rr} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{array}\right) \\ 3X-2Y=\left(\begin{array}{rr} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{array}\right) \end{array}\right.$$

b) Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solución:

a)

$$\begin{cases} \left(2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\right)(-3) \\ \left(3X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\right)(2) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -6X - 9Y = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -9 & -21 \end{pmatrix} \\ 6X - 4Y = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow -13Y = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ -13 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow Y = -\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 13 & 0 \\ -13 & -13 \end{pmatrix} \Longrightarrow Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en una de las ecuaciones:

$$2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow 2X + 3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$2X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$;
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -15 & 1 \end{pmatrix}$ luego

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1 - 2^n & 1 \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Problema 3 *(2,5 puntos)*Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Encuentre la matriz X que resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$AX - X = B$$

Solución:

$AX - X = B \Longrightarrow (A-I)X = B \Longrightarrow X = (A-I)^{-1}B =$

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta.

b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta?

Solución:

Sean x el número de viajes por la ruta A, y el número de viajes por la ruta B y z el número de viajes por la ruta C.

a) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ y=x+z \\ 2(x+z)=70 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ x-y+z=0 \\ x+z=35 \end{array}\right. \Longrightarrow F_3 = F_1 + F_2 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado. El sistema tiene infinitas soluciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ x-y+z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=35-\lambda \\ y=35 \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

b) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ y=x+z \\ 2z=y-5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ x-y+z=0 \\ y-2z=5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=20 \\ y=35 \\ z=15 \end{array}\right.$