Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Coincidente 2021) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro real a para los que la matriz A no es invertible.

b) Para $a = 1$, calcule la matriz inversa A^{-1} y obtenga la matriz X tal que $AX = B$.

Solución:

a) $|A| = 2(a^2 - 4) = 0 \Longrightarrow a = \pm 2 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$ si $a = \pm 2\}$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & -1/3 \\ 2/3 & 1 & -4/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & -1/3 \\ 2/3 & 1 & -4/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 10/3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

a) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Asíntotas verticales: $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty; \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Asíntotas horizontales: No hay

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = -\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \infty$$

- Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x(1-x)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^3-2x^2+x} = 1$$

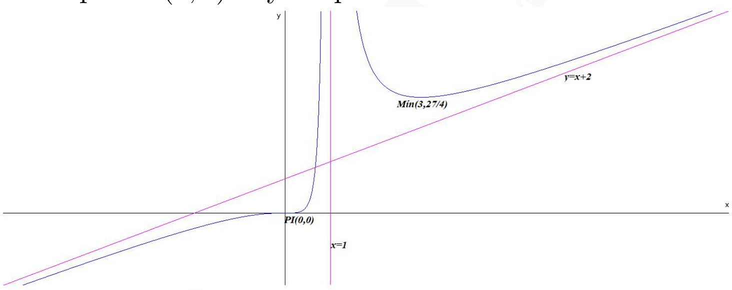
$$n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{(1-x)^2} - x \right) = 2$$

$$y = x + 2$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(1, 3)$, tiene un mínimo en el punto $\left(3, \dfrac{27}{4}\right)$.
En el punto $(0, 0)$ hay un punto de inflexión.



Problema 3 *(2 puntos)* Sea $f(x) = x^2 + ax$ donde a es un parámetro real.

a) Determine el valor de a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$ y $F(2) = 9$.

b) Para $a = -2$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

Solución:

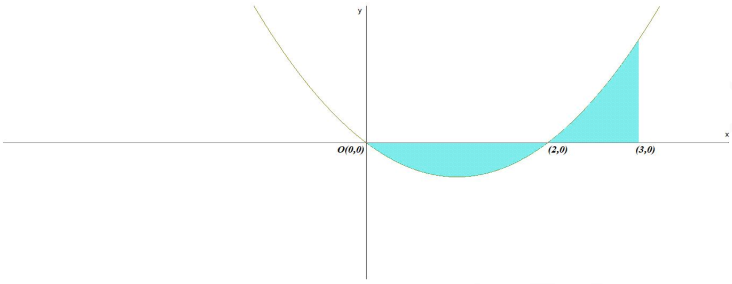
a) $F(x) = \displaystyle\int (x^2 + ax)\,dx = +C$
$F(0) = 0 + 0 + C = 3 \Longrightarrow C = 3$
$F(2) = \dfrac{8}{3} + 2a + C = 9 \Longrightarrow 2a = 9 - C - \dfrac{8}{3} = 9 - 3 - \dfrac{8}{3} \Longrightarrow a = \dfrac{5}{3}$
$f(x) = x^2 + \dfrac{5}{3}x$ y $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5x^2}{6} + 3$

b) Para $a=-2 \Longrightarrow f(x)=x^2-2x=x(x-2)=0 \Longrightarrow x=0$ y $x=2$. La gráfica de la función corta al eje de abscisas en el intervalo $[0,3]$ en $x=2$.

$$S_1=\int_0^2 (x^2+2x)\,dx=\left.\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2=-\frac{4}{3}$$

$$S_2=\int_2^3 (x^2+2x)\,dx=\left.\frac{x^3}{3}+x^2\right]_2^3=\frac{4}{3}$$

$$S=|S_1|+|S_2|=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\ u^2$$

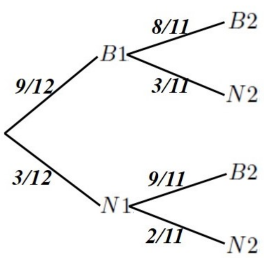


Problema 4 *(2 puntos)* Una urna contiene 9 bolas blancas y 3 negras. Se seleccionan al azar consecutivamente y sin reemplazamiento dos bolas. Calcule la probabilidad de que

a) La segunda bola seleccionada sea negra.

b) Ambas bolas seleccionadas sean negras, dado que la segunda bola seleccionada es negra.

Solución:
Sean $B1$: la primera es blanca, $N1$: la primera es negra, $B2$: la segunda es blanca y $N2$: la segunda es negra.



a) $P(N2)=P(N2|B1)P(B1)+P(N2|N1)P(N1)=\frac{3}{11}\cdot\frac{9}{12}+\frac{2}{11}\cdot\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=0,25$

b) $P(N1|N2) = \dfrac{P(N2|N1)P(N1)}{P(N2)} = \dfrac{\frac{2}{11}\cdot\frac{3}{12}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{11} = 0,182$

Problema 5 *(2 puntos)* Una máquina de empaquetar mantequilla la corta en barras. El peso de una barra de mantequilla se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 4 gramos.

a) Se analiza el peso de 15 barras. La media muestral resulta ser 254 gramos. Determine un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.

b) Para una muestra de 25 barras, se sabe que la media poblacional del peso de una barra de mantequilla es 250 gramos. Calcule la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 248 gramos.

Solución:

$$N(\mu; 4)$$

a) $n = 15$, $\overline{X} = 254$ y $NC = 0,95 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P\left(Z \le Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{4}{\sqrt{15}} = 2,02428$$

$IC = (\overline{X}-E; \overline{X}+E) = (254-2,02428; 254+2,02428) = (251,97572; 256,02428)$

b) $\mu = 250$ y $n = 25$ $P(\overline{X} \ge 248) = P\left(Z \ge \dfrac{248-250}{4/\sqrt{25}}\right) = P(Z \ge -2,5) = 1 - P(Z \le -2,5) = 1 - (1 - P(Z \le 2,5)) = P(Z \le 2,5) = 0,9938$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Coincidente 2021) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se pide

a) Represente la región S del plano delimitada por las inecuaciones

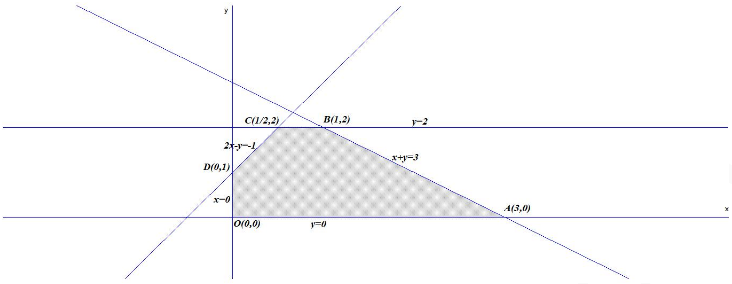
$$-2x + y \le 1, \quad 0 \le y \le 2, \quad x + y \le 3 \quad x \ge 0$$

y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ sobre la región S.

Solución:

a) Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(1,2)$, $C(1/2,2)$ y $D(0,1)$



b) $f(x,y)=x+y$ en S: $\left\{\begin{array}{l} f(0,0)=0 \\ f(3,0)=3 \\ f(1,2)=3 \\ f(1/2,2)=5/2 \\ f(0,1)=1 \end{array}\right. \Longrightarrow$

El valor máximo será de 3 y se alcanza en cualquier punto del segmento que une los puntos $A(3,0)$ y $B(1,2)$ y el valor mínimo será de 0 y se alcanza en el punto $O(0,0)$.

Problema 2 *(2 puntos)* Se desea rellenar una piñata para un cumpleaños con juguetes de 1, 2 y 5 euros. Por cada cinco juguetes de 5 euros debe haber un juguete de 2 euros, por cada dos juguetes de 2 euros debe haber tres de 1 euro. Si para rellenar la piñata se compran juguetes por valor de 228 euros, ¿cuántos juguetes de 1, 2 y 5 euros habría que comprar para introducir en la piñata?

Solución:

Sean x los juguetes de un euro, y los de dos euros y z los de tres euros

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+5z=228 \\ -5y+z=0 \\ 2x-3y=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=12 \\ y=8 \\ z=40 \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=ax^2+\frac{b}{x}+2x$$

donde a y b son parámetros reales.

a) Calcule a, b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(1,2)$ sea paralela a la recta $y=-4x$.

b) Determine todos los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en el punto $(1,2)$.

Solución:

a) $f(1) = a + b + 2 = 2 \Longrightarrow a + b = 0$

$$f'(x) = 2ax - \frac{b}{x^2} + 2 \Longrightarrow m = f'(1) = 2a - b + 2 = -4 \Longrightarrow 2a - b = -6$$

$$\left\{\begin{array}{c} a + b = 0 \\ 2a - b = -6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 2 \end{array}\right.$$

b) $f(1) = a + b + 2 = 2 \Longrightarrow a + b = 0$

$$f''(x) = 2a + \frac{2b}{x^2} \Longrightarrow f''(1) = 2(a + b) = 0 \Longrightarrow a + b = 0$$

Luego no hay solución única, los parámetros tienen que cumplir $a = -b$.

Problema 4 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos con $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A|\overline{B}) = \frac{4}{5}$.

a) Calcule $P(A \cap \overline{B})$.

b) ¿Son A y B incompatibles? Justifique la respuesta.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \Longrightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A|\overline{B})P(\overline{B}) = \dfrac{4}{5}(\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{5}$

b) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{5} = 0$, luego los sucesos son incompatibles.

Problema 5 *(2 puntos)* Para que una determinada marca de chocolate estudie entre sus clientes la demanda de sus cajas de bombones, se desea estimar la proporción de cajas grandes en relación al número de cajas de bombones vendidas, P.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de la demanda es $P = 0,2$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de ventas de cajas de bombones para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 8 %.

b) Tomada al azar una muestra de 200 cajas de bombones vendidas, se encontró que 25 habían sido cajas grandes. Determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de cajas grandes en relación a la venta total de cajas de bombones.

Solución:

a) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$
$P\left(Z \le Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$ y $E = 0,08$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Longrightarrow 0,08 = 2,575\sqrt{\frac{0,2\cdot 0,8}{n}} \Longrightarrow$$

$$n \ge 0,2\cdot 0,8\left(\frac{2,575}{0,08}\right)^2 = 165,765625$$

Luego $n = 166$.

b) $p = \dfrac{25}{200} = 0,125$, $n = 200$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P\left(Z \le Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,125\cdot 0,875}{200}} = 0,04584$$

$$IC = (p - E; p + E) = (0,125 - 0,04584; 0,125 + 0,04584) \Longrightarrow$$

$$(0,07916; 0,17084)$$