Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria 2021) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para $a = 2$, calcule, si existe, la matriz X que satisface $AX = B$.

Solución:

a) $|A| = -a - 1 = 0 \Longrightarrow a = -1 \Longrightarrow \exists A^{-1} \ \forall a \in \mathbb{R} - \{-1\}$

b) Si $a = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$

$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -4/3 & -5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -5/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2 puntos)* Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0,5 euros . Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.

a) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.

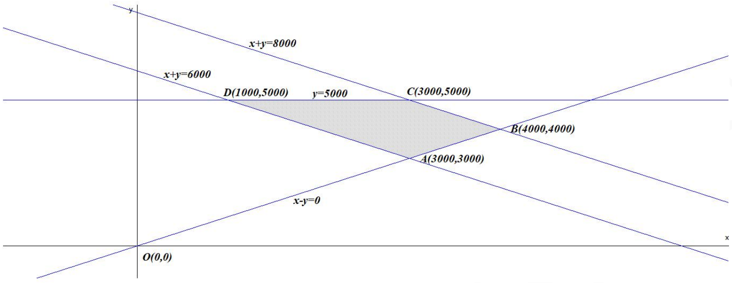
b) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

Solución:
Sean x metros del modelo A2020 e y metros del modelo B2020.

a) Región factible:

$$\begin{cases} x + y \geq 6000 \\ y \leq 5000 \\ x + y \leq 8000 \\ y \geq x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6000 \leq x + y \leq 8000 \\ x - y \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 5000 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $A(3000, 3000)$, $B(4000, 4000)$, $C(3000, 5000)$ y $D(1000, 5000)$



b) La función objetivo es $f(x, y) = 2x + 0,5y$ en S:

$$\begin{cases} f(3000, 3000) = 7500 \\ f(4000, 4000) = 10000 \\ f(3000, 5000) = 8500 \\ f(1000, 5000) = 4500 \end{cases} \Longrightarrow$$

El valor mínimo será de 4500€ y se alcanza fabricando 1000 metros del modelo A2020 y 5000 metros del modelo B2020.

Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ \dfrac{3a}{x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de a es $f(x)$ derivable?

b) Para $a = 1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) ☛ **Continuidad en** $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} (x^2 - x - 1) = 5 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} \dfrac{3a}{x} = a \\ f(3) = 5 \end{cases} \Longrightarrow f \text{ continua si } a = 5$$

Cuando $a = 5$ las dos ramas son continuas y también lo es en $x = 3 \Longrightarrow f$ es continua en $\mathbb{R}$.

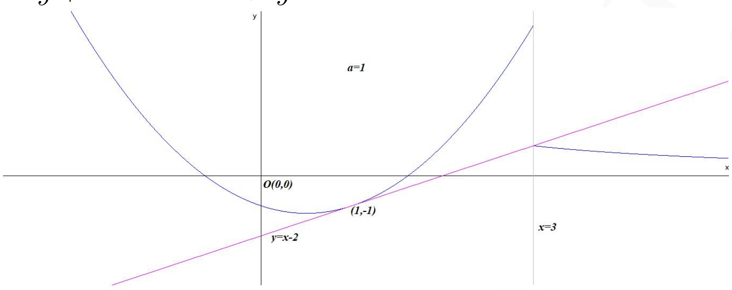
- **Derivabilidad en** $x = 3$ para $a = 5$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad x < 3 \\ -\dfrac{15}{x^2} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(3^-) = 5 \\ f'(3^+) = -\dfrac{5}{3} \end{cases} \Longrightarrow$$

f no es derivable en $x = 3$

Luego f es derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$ para $a = 5$.

b) Para $a = 1$ en $x = 1$ la función es $f(x) = x^2 - x - 1 \Longrightarrow b = f(1) = -1$ y $f'(x) = 2x - 1 \Longrightarrow m = f'(1) = 1$. La ecuación de la recta tangente es $y + 1 = x - 1 \Longrightarrow y = x - 2$



Problema 4 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,5$, $P(\overline{B}) = 0,8$, $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,9$.

a) Estudie si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcule $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,9 \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,1$
$P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1 \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Longrightarrow A$ y B son independientes.

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,5 + 0,2 - 0,1) = 0,4$
$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0,4}{0,8} = 0,5$$

Problema 5 *(2 puntos)* El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media muestral de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al $95\,\%$ para μ.

b) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $n = 20$, $\overline{X} = 60$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{8}{\sqrt{20}} = 3,5062$$

$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (60 - 3,5062; 60 + 3,5062) = (56,4938; 63,5062)$

b) $\mu = 59$ y $n = 10$
$P(57 \leq \overline{X} \leq 61) = P\left(\dfrac{57 - 59}{8/\sqrt{10}} \leq Z \leq \dfrac{61 - 59}{8/\sqrt{10}}\right) = P(-0,79 \leq Z \leq 0,79) = P(Z \leq 0,79) - P(Z \leq -0,79) = P(Z \leq 0,79) - (1 - P(Z \leq 0,79)) = 2P(Z \leq 0,79) - 1 = 2 \cdot 0,7852 - 1 = 0,5704$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria 2021) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + 2ay + z = 0 \\ -x - ay = 1 \\ -y - z = -a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array}\right)$, $|A| = 1 - a = 0 \Longrightarrow a = 1$.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+F_1\\ F_3\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a=3$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+6y+z=0\\ -x-3y=1\\ -y-z=-3\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=2\\ y=-1\\ z=4\end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$$

a) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

Asíntotas:

☛ Asíntotas verticales: $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\left[\frac{-1}{0^+}\right]=-\infty;\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\left[\frac{-1}{0^+}\right]=-\infty$$

☛ Asíntotas horizontales: No hay

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=-\infty;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\infty$$

☛ Asíntotas oblicuas: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2}{x(x^2-2x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2}{x^3-2x^2+x}=1$$

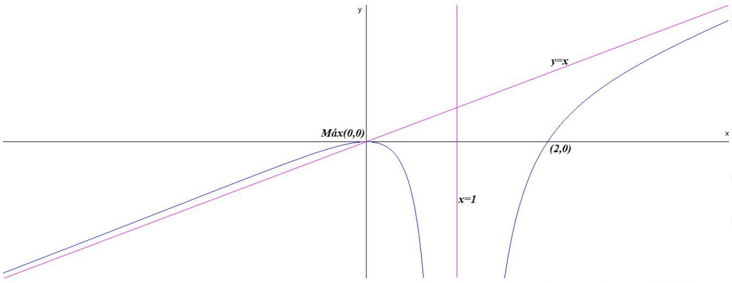
$$n=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{x^2-2x+1}\right)=0\Longrightarrow y=x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x(x^2-3x+4)}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0.$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(0, 1)$, tiene un máximo en el punto $(0, 0)$.



Problema 3 *(2 puntos)* Se sabe que la derivada de una función real $f(x)$ es:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$

donde a y b son parámetros reales.

a) Determine la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 11$.

b) Determine los máximos y mínimos locales de $f(x)$, si los hubiera.

Solución:

a) $f(x) = \displaystyle\int (3x^2 + 8x)\, dx = x^3 + 4x^2 + C$, como $f(1) = 11 \Longrightarrow f(1) = 1 + 4 + C = 11 \Longrightarrow C = 6$. Luego $f(x) = x^3 + 4x^2 + 6$

b) $f'(x) = 3x^2 + 8x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -\dfrac{8}{3}$

$$f''(x) = 6x + 8 \Longrightarrow \begin{cases} f''(0) = 8 > 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ mínimo} \\ \\ f''\left(-\dfrac{8}{3}\right) = -8 < 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{8}{3} \text{ máximo} \end{cases}$$

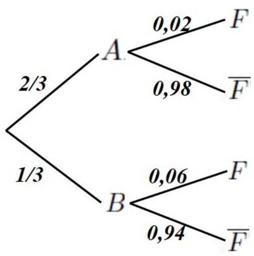
Hay un mínimo relativo en $(0, 6)$ y un máximo relativo en $\left(-\dfrac{8}{3}, \dfrac{418}{27}\right)$.

Problema 4 *(2 puntos)* Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de 0,02, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de 0,06. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:

a) No sufra fracaso escolar.

b) Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

Solución:
Sean A: alumno matriculado residente en el municipio A, B: alumno matriculado residente en el municipio B, F: alumno con fracaso escolar y $\overline{F}$: alumno sin fracaso escolar.



a) $P(\overline{F}) = P(\overline{F}|A)P(A) + P(\overline{F}|B)P(B) = 0,98 \cdot \dfrac{2}{3} + 0,94 \cdot \dfrac{1}{3} = 0,9667$

b) $P(A|F) = \dfrac{P(F|A)P(A)}{P(F)} = \dfrac{0,02 \cdot \frac{2}{3}}{1 - 0,9667} = 0,4004$

Problema 5 *(2 puntos)* El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\overline{X}$, sea menor que 30,5 minutos.

Solución:

$$N(\mu, 3)$$

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P\left(Z \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$
y $E = 1$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,96\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 3}{1}\right)^2 = 34,5744$$

Luego $n = 35$.

b) $\mu = 32$ y $n = 16$

$P(\overline{X} \leq 30,5) = P\left(Z \leq \dfrac{30,5 - 32}{3/\sqrt{16}}\right) = P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2) =$
$1 - 0,9772 - 1 = 0,0228$