Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Diciembre 2020

Problema 1 *(2 puntos)* Considere la región del plano S definida por

$$x - y \geq 0, \quad y + 2x \leq 8, \quad 0 \leq y \leq 2$$

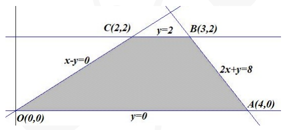
a) Represente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = 4x - y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores.

Solución:

a) La región factible:

$$\left\{\begin{array}{l} x - y \geq 0 \\ y + 2x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y \geq 0 \\ 2x + y \leq 8 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2 \end{array}\right.$$

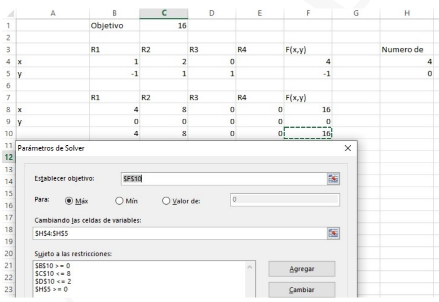


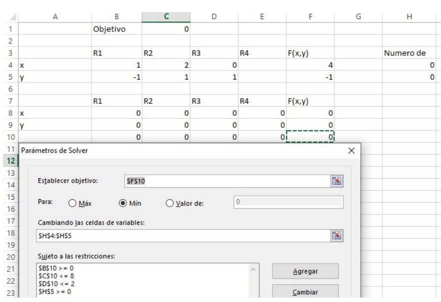
Los vértices a estudiar serán: $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(3, 2)$ y $C(2, 2)$

b) $f(x, y) = 4x - y$ en S:

$$\left\{\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ f(4,0) = 16 \\ f(3,2) = 10 \\ f(2,2) = 6 \end{array}\right. \Longrightarrow$$ El valor máximo será de 16 y se alcanza en el punto $A(4, 0)$ y el valor mínimo será de 0 y se alcanza en el punto $O(0, 0)$.

Solución por solver :





Problema 2 La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3, \;\; 0 \leq y \leq 15, \;\; y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0, \;\; y - x \leq 10, \;\; y + 20 \geq 2x$$

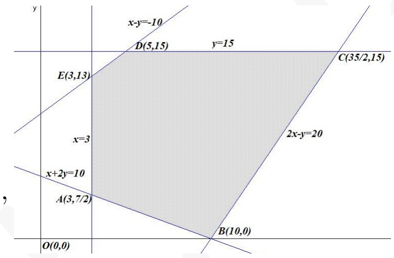
a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

Solución:

a) La región factible S es:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0 \\ y - x \leq 10 \\ y + 20 \geq 2x \end{cases} \implies \begin{cases} x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ x + 2y \geq 10 \\ x - y \geq -10 \\ 2x - y \leq 20 \end{cases}$$



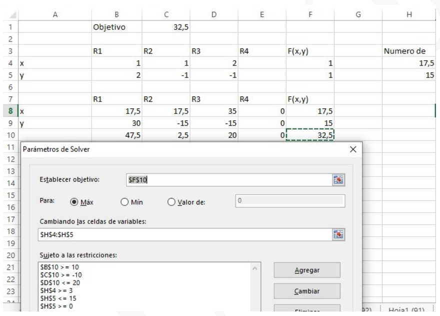
Los vértices son: $A\left(3, \dfrac{7}{2}\right)$, $B(10,0)$, $C\left(\dfrac{35}{2}, 15\right)$, $D(5,15)$ y $E(3,13)$.

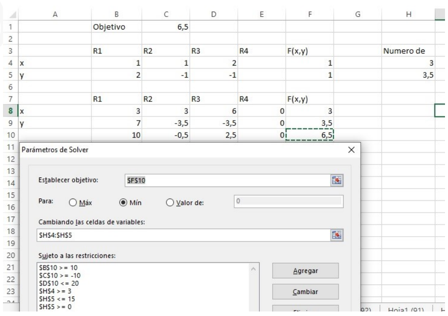
b) La función objetivo $f(x,y) = x + y$ sobre los vértices da los siguientes resultados:

$$\begin{cases} f\left(3, \dfrac{7}{2}\right) = 6,5 \Longleftarrow \text{Mínimo} \\ f(10,0) = 10 \\ f\left(\dfrac{35}{2}, 15\right) = 32,5 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(5,15) = 20 \\ f(3,13) = 16 \end{cases}$$

El máximo se encuentra en el punto $C\left(\dfrac{35}{2}, 15\right)$ con un valor de 32,5 y el mínimo en el punto $A\left(3, \dfrac{7}{2}\right)$ con un valor de 6,5.

Solución por solver :



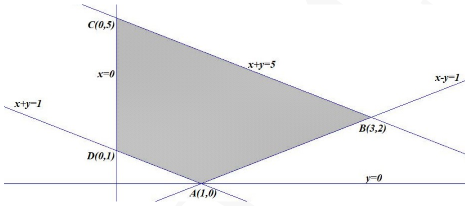


Problema 3 *(2 puntos)* Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 €, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 €. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factible, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo.

Solución:

Sea x : nº de Ha de trigo e y : nº de Ha de cebada.

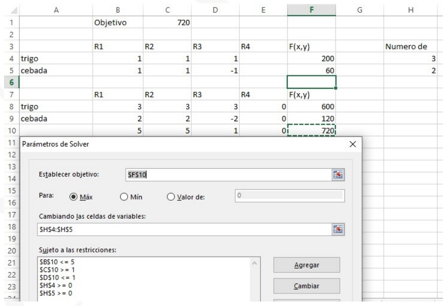
La región factible es:
$$\begin{cases} x+y \le 5 \\ x+y \ge 1 \\ x-y \le 1 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A(1,0)$, $B(3,2)$, C(0,5) y $D(0,1)$

La función objetivo es $f(x,y) = 200x + 60y \Longrightarrow$
$$\begin{cases} f(1,0) = 200 \\ f(3,2) = 720 \\ f(0,5) = 300 \\ f(0,1) = 60 \end{cases} \Longrightarrow \text{El máximo beneficio será de } 720 \text{ €}$$
que se obtiene plantando 3 Ha de trigo y 2 Ha de cebada.

Solución por solver :



Problema 4 Julián dispone de 10 hectáreas de terreno para cultivar dos variedades de uva: tempranillo y viura. El beneficio que le produce una hectárea de tempranillo es de 2 mil € y la de viura 3 mil €. Dispone de 180 kg de productos fitosanitarios; una hectárea de tempranillo precisa de 10 kg de estos productos y una hectárea de viura 20. Vendimiar una hectárea de tempranillo le cuesta 20 horas y una de viura 10 horas; dispone de un total de 160 horas de trabajo de vendimiadores.

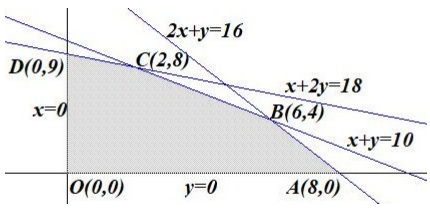
a) ¿Cómo puede distribuir Julián el cultivo de sus 10 hectáreas respetando sus restricciones? Dibuja en el plano la región factible que represente los posibles repartos.

b) Escribe la función que representa el beneficio que obtiene Julián ¿Con qué distribución obtiene el máximo beneficio? Calcula dicho máximo.

Solución:

Llamamos x : nº de hectáres de tempranillo e y : nº de hectáres de viura.

a) La región factible es:
$$\begin{cases} x+y \le 10 \\ 10x+20y \le 180 \\ 20x+10y \le 160 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y \le 10 \\ x+2y \le 18 \\ 2x+y \le 16 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

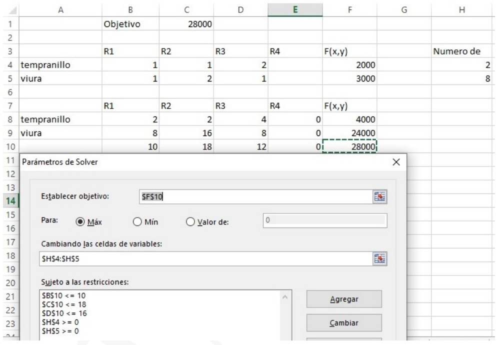


Los vértices son: $O(0,0)$, $A(8,0)$, $B(6,4)$, $C(2,8)$ y $D(0,9)$.

b) $f(x,y) = 2000x + 3000y$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(8,0) = 16000 \\ f(6,4) = 24000 \\ f(2,8) = 28000 \ \text{Máximo} \\ f(0,9) = 27000 \end{cases}$$



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Objetivo	28000					
2								
3		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		Numero de
4	tempranillo	1	1	2		2000		2
5	viura	1	2	1		3000		8
6								
7		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		
8	tempranillo	2	2	4	0	4000		
9	viura	8	16	8	0	24000		
10		10	18	12	0	28000		

Se deben cultivar 2 hectáreas de tempranillo y 8 hectáreas de viura con un beneficio máximo de 28000 €.

Problema 5 Los beneficios de una empresa vienen dados por la función $f(x, y) = x + y + 1$ pero esta sujeta a las siguientes restricciones:

$$4x + y \geq 8; \quad 3x - 2y \leq 12; \quad x + 5y \leq 21; \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

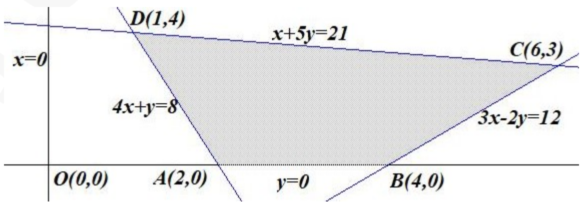
a) Dibuja en el plano la región factible que representa estas restricciones.

b) Para qué valores de x e y obtiene la empresa el beneficio máximo.

Solución:

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 4x + y \geq 8 \\ 3x - 2y \leq 12 \\ x + 5y \leq 21 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

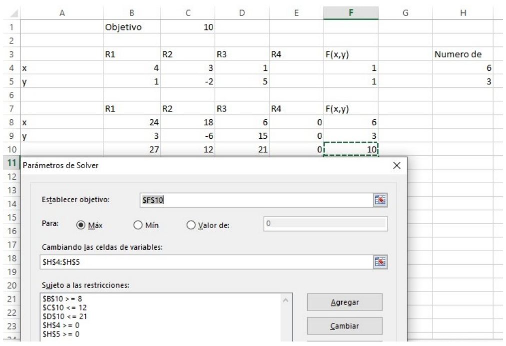


Los vértices son: $A(2, 0)$, $B(4, 0)$, $C(6, 3)$ y $D(1, 4)$.

b) $f(x, y) = x + y + 1$

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(2,0) = 3 \\ f(4,0) = 5 \\ f(6,3) = 10 \ \text{Máximo} \\ f(1,4) = 6 \end{cases}$$



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Objetivo	10					
2								
3		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		Numero de
4	x	4	3	1		1		6
5	y	1	-2	5		1		3
6								
7		R1	R2	R3	R4	F(x,y)		
8	x	24	18	6	0	6		
9	y	3	-6	15	0	3		
10		27	12	21	0	10		

El beneficio máximo es de 10 y se obtiene para $x = 6$ e $y = 3$.