Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Diciembre 2020

Problema 1 Una empresa fabrica dos tipos de biocombustibles a partir de aceites vegetales ($T1$ y $T2$) y vende cada tonelada de biocombustible a un precio de 2000 € y 1800 €, respectivamente. Cada tonelada de biocombustible $T1$ requiere 3 horas de proceso en la línea de producción y 2 unidades de materia prima. Cada tonelada de biocombustible $T2$ requiere 1 hora de proceso en la línea de producción y 4 unidades de materia prima. Cada semana la empresa dispone de 195 unidades de materia prima y de 90 horas de tiempo de proceso en la línea de producción. Determine cuántas toneladas de cada tipo de biocombustible se deberá fabricar semanalmente para maximizar el precio total de venta, sabiendo que además se desea fabricar un total de al menos 40 toneladas de biocombustible.

a) Plantee el problema.

b) Resuélvalo gráficamente.

c) Analice gráficamente qué ocurriría si se considerara un objetivo de tipo ecológico, y se deseara minimizar el nivel de contaminación asociado a este proceso de producción, sabiendo que fabricar una tonelada de biocombustible $T1$ produce 5 unidades de contaminación y fabricar una tonelada de biocombustible $T2$ produce 10 unidades de contaminación.

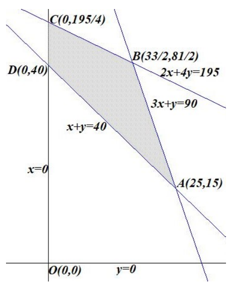
Solución:

Llamamos x : nº de toneladas de aceite de $T1$ e y : nº de toneladas de aceite de $T2$.

	Horas	Materia prima	Venta
$T1$	3	2	2000
$T2$	1	4	1800
	≤ 90	≤ 195	

a) La región factible es:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 90 \\ 2x + 4y \leq 195 \\ x + y \geq 40 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

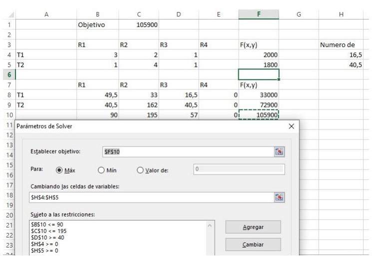


b) Los vértices son: $A(25,15)$, $B\left(\frac{33}{2}, \frac{81}{2}\right)$, $C\left(0, \frac{195}{4}\right)$ y $D(0,40)$.

c) $f(x,y) = 2000x + 1800y$

Solución por solver :

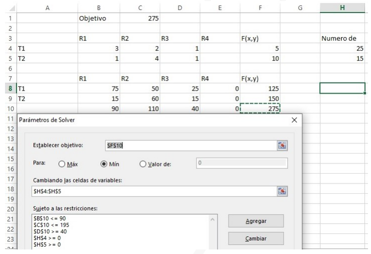
$$\begin{cases} f(25,15) = 77000 \\ f\left(\frac{33}{2}, \frac{81}{2}\right) = 105900 \ \text{Máximo} \\ f\left(0, \frac{195}{4}\right) = 87750 \\ f(0,40) = 72000 \end{cases}$$



La producción sería máxima con 16,5 toneladas de $T1$ y 40,5 de $T2$ con una venta de 105900 €.

d) Ahora la función objetivo es $f(x,y) = 5x + 10y$

Solución por solver :



$$\begin{cases} f(25,15) = 275 \text{ Mínimo} \\ f\left(\frac{33}{2}, \frac{81}{2}\right) = 487,5 \\ f\left(0, \frac{195}{4}\right) = 487,5 \\ f(0,40) = 400 \end{cases}$$

La contaminación es mínima cuando se producen 25 toneladas de $T1$ y 15 de $T2$, con un valor de 275.

Problema 2 Sea S la región del plano definida por las inecuaciones.

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 2x-4,\ y \leq x-1,\ 2y \geq x,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

a) Representar la región S y obtener sus vértices.

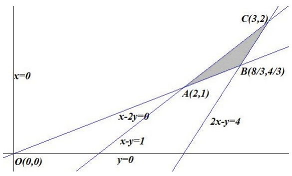
b) Maximizar la función $f(x,y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el máximo.

c) Minimizar la función $f(x,y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el mínimo.

Solución:

a) La región factible es:

$$\begin{cases} y \geq 2x-4 \\ y \leq x-1 \\ 2y \geq x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y \leq 4 \\ x - y \geq 1 \\ x - 2y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices son: $A(2,1)$, $B\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$ y $C(3,2)$.

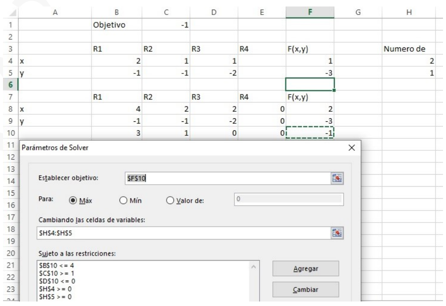
$f(x,y) = x - 3y$

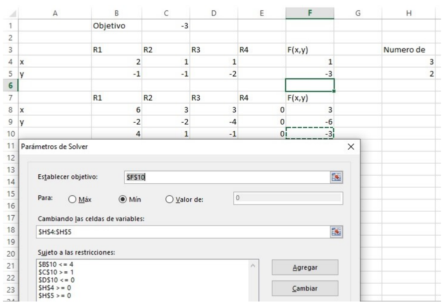
$$\begin{cases} f(2,1) = -1 \text{ Máximo} \\ f\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3} \\ f(3,2) = -3 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

b) El valor máximo se alcanza en el punto $A(2,1)$ y vale -1.

c) El valor mínimo se alcanza en el punto $C(3,2)$ y vale -3.

Solución por solver :





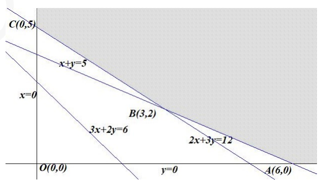
Problema 3 La repoblación forestal de un bosque quemado en un gran incendio se va a llevar a cabo por dos empresa diferentes de jardinería. Hay que repoblar con pinos, eucaliptos y chopos. La primera empresa es capaz de plantar, en una semana, 30 pinos, 20 eucaliptos y 20 chopos. La segunda empresa planta 20 pinos, 30 eucaliptos y 20 chopos. El coste semanal se estima en 33.000 € para la primera empresa de jardinería y de 35.000 € para la segunda. Se necesita plantar un mínimo de 60 pinos, 120 eucaliptos y 100 chopos. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

Solución:
Llamamos x : n$^{\underline{o}}$ de semanas de la empresa 1 e y : n$^{\underline{o}}$ de de semanas de la empresa 2.

	Pinos	Eucaliptus	Chopos	Coste
empresa 1	30	20	20	33000
empresa 2	20	30	20	35000
	≥ 60	≥ 120	≥ 100	

La región factible es:

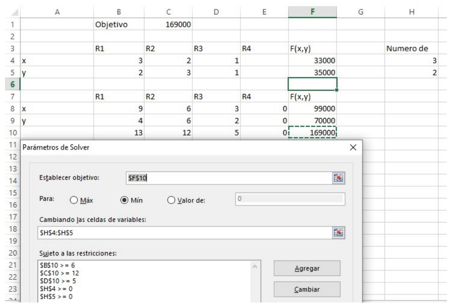
$$\left\{\begin{array}{l} 30x+20y\geq 60 \\ 20x+30y\geq 120 \\ 20x+20y\geq 100x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+2y\geq 6 \\ 2x+3y\geq 12 \\ x+y\geq 5 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right.$$



Los vértices son: $A(6,0)$, $B(3,2)$ y $C(0,5)$.

$f(x,y) = 33000x + 35000y$

Solución por solver :



$$\left\{\begin{array}{l} f(6,0)=198000 \\ f(3,2)=169000,\ \text{Mínimo} \\ f(0,5)=175000 \end{array}\right.$$

La empresa 1 debe de trabajar 3 semanas y 2 la empresa 2 con un coste mínimo de 169000 €.

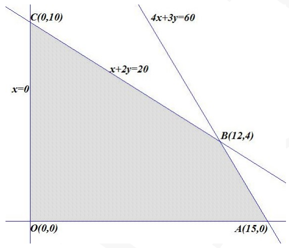
Problema 4 En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 € y 12 €, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulce deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta.

Solución:
Llamamos x : n$^{\underline{o}}$ de dulces de A e y : n$^{\underline{o}}$ de dulces de B.

	Azucar	Huevos	Venta
A	$0,5$	8	15
B	1	6	12
	≤ 10	≤ 120	

La región factible es:

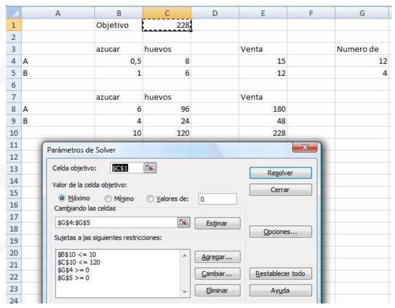
$$\left\{\begin{array}{l} 0,5x+y\le 10\\ 8x+6y\le 120\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y\le 20\\ 4x+3y\le 60\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{array}\right.$$



Los vértices son: $A(15,0)$, $B(12,4)$ y $C(0,10)$.

$f(x,y)=15x+12y$

Solución por solver :



$$\left\{\begin{array}{l} f(15,0)=225\\ f(12,4)=228\ \text{Máximo}\\ f(0,10)=120\end{array}\right.$$

Se deben fabricar 12 dulces A y 4 dulces B con un precio máximo de 228 €.

Problema 5 Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal y 15000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 € y 60 € por cada metro cúbico de tipo B.

a) Represente la región del plano determinada por las restricciones anteriores y determine las coordenadas de sus vértices.

b) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.

Solución:

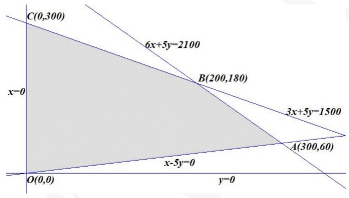
Sea x número de m^3 de tipo A e y número de m^3 de tipo B.

a) Podemos construir la siguiente tabla:

	tierra vegetal	horas de trabajo
A	60	30
B	50	50
Totales	≤ 21000	≤ 15000

La región factible será:

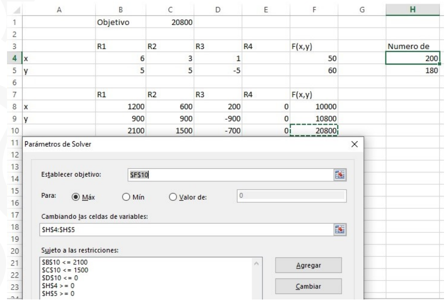
$$\begin{cases} 60x + 50y \le 21000 \\ 30x + 50y \le 15000 \\ x \le 5y \\ x, y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6x + 5y \le 2100 \\ 3x + 5y \le 1500 \\ x - 5y \le 0 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(300,60)$, $B(200,180)$ y $C(0,300)$

b) $f(x,y) = 50x + 60y$ en S:

Solución por solver :



$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(300,60) = 18600 \\ f(200,180) = 20800 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(0,300) = 18000 \end{cases} \Longrightarrow$$

El beneficio máximo será de 20800 € y se alcanza con 200 m^3 de A y 180 m^3 de B.