Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2020

Problema 1 *(2 puntos)*Consideramos el sistema de ecuaciones lineales donde a es un número real

$$\begin{cases} ay + az = 0 \\ y + z = 0 \\ 4x - 2y + az = a \end{cases}$$

a) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema es compatible y determinado?

b) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema no tenga soluciones?

c) Resuelve el sistema si $a = 0$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{array}\right)$; $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 \Longrightarrow$ El sistema NO puede ser compatible determinado para cualquier valor del parámetro a.
Observación: Para que el sistema sea compatible determinado es necesario que Rango$(A) =$ $3 =$Rango$(\overline{A})$ =nº incógnitas.

b)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ aF_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Luego el sistema es compatible indeterminado para cualquier valor del parámetro real $a \Longrightarrow$ el sistema siempre tiene solución.

c) Si $a = 0$:

$$\begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ y + z = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

Problema 2 *(2 puntos)*Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot B - C^T$

b) Comprueba que la matriz C no tiene inversa y explica la razón por la que el producto $D^2 \cdot B$ no puede ser realizado.

Solución:

a) $A \cdot B - C^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 \\ 4 & 2 & 10 \\ 8 & 4 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 15 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 6 & 16 \end{pmatrix}$

b) $|C| = 0 \Longrightarrow C$ no tiene inversa.

$\dim(D^2) = 3 \times 3$ y $\dim(B) = 1 \times 3 \Longrightarrow$ el número de columnas de la matriz D^2 es distinto del número de filas de B.

Problema 3 *(2 puntos)*Sea A la matriz siguiente: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & x \end{pmatrix}$

a) Determinar, justificando la respuesta, para qué valor del parámetro x no existe A^{-1}.

b) Hallar la inversa de la matriz A para $x = 0$. Justificar la respuesta.

Solución:

a) $|A| = -6(x+1) = 0 \Longrightarrow x = -1 \Longrightarrow \begin{cases} \nexists A^{-1} & \text{si } x = -1 \\ \exists A^{-1} & \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} \end{cases}$

b) Si $x = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/6 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 4 *(2 puntos)*Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Compruebe que se cumple $A^{-1} = A^2$.

b) Resolver la ecuación matricial $AX + B = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = A^2$

b) $AX + B = I \Longrightarrow X = A^{-1}(I - B) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] =$

$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Problema 5 *(2 puntos)*Una tienda de electrodomésticos ha vendido 750 televisores de tres modelos diferentes, A, B y C. Los ingresos totales obtenidos han sido de 230400 euros. El precio de venta del modelo A era de 320 euros; el del modelo B, un 20 % más barato que A; y el del C, un 10 % más caro que A. Además, de A y C se han vendido, en total, el doble de unidades que B.

a) Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular cuántas unidades se han vendido de cada modelo de televisor.

b) Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

c) Resolverlo.

Solución:

a) Sean x el número de televisores modelo A, y el número de televisores modelo B y z el número de televisores modelo C.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=750 \\ 320x+0,8\cdot 320y+1,1\cdot 320z=230400 \\ x+z=2y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=750 \\ 10x+8y+11z=7200 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 750 \\ 10 & 8 & 11 & 7200 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$, $|A|=3\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

c)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=750 \\ 10x+8y+11z=7200 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=300 \\ y=250 \\ z=200 \end{array}\right.$$