

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)
Octubre 2020

Problema 1 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$
$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Problema 2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & m & m \\ m & 2 & 2 \\ 4 & -m & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} 2 & m & m \\ m & 2 & 2 \\ 4 & -m & -1 \end{vmatrix} = (1-m)(m^2-4) = 0 \implies m = \pm 2, \quad m = 1$$

Si $m = \pm 2$ o $m = 1 \implies |A| = 0 \implies \nexists A^{-1}$.

Si $m \neq \pm 2$ y $m \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}$.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y en particular A^{1000}

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1000 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \implies \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{pmatrix} -a+c & -b+d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a-b \\ -c & c-d \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{cases} -a+c = -a \implies c=0 \\ -b+d = a-b \implies a=d \\ -c = -c \implies 0=0 \\ -d = c-d \implies c=0 \end{cases}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.