Examen de Matemáticas II (Modelo 2021)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales A tiene inversa.

b) (1 punto) Para $x = -1$, calcular la inversa de A.

c) (1 punto) Para $x = 1$, hallar $(AB^t)^3$ y $(AB^t)^{2020}$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

Solución:

a) $|A| = x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

b) Si $x = -1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

c) Si $x = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$C = AB^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1 & 2/3 \\ -1/3 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$C^{2020} = (C^3)^{673} \cdot C = (-I)^{673} \cdot C = -C = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad x \le 1, \quad x \ne -1 \\[2ex] \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si} \qquad\qquad x > 1 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de f en $x = 1$.

b) (1 punto) Halle las asíntotas de f, si existen.

c) (1 punto) Determine el valor de $x_0 < 1$ que verifica que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente $-\dfrac{1}{2}$. Escriba la ecuación de dicha recta tangente.

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$: $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{2}{x+1} = 1$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{\ln x}{x-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{1/x}{1} = 1$ y $f(1) = 1 \Longrightarrow f$ es continua en $x = 1 \Longrightarrow f$ continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

b) Asíntotas:
En la rama $x \le 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{2}{x+1}$

- Verticales:
En $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{2}{x+1} = \left[\dfrac{2}{0^-}\right] = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{2}{x+1} = \left[\dfrac{2}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: $y = 0$.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} = 0$$

- Oblícuas: No hay por haber horizontales.

En la rama $x > 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$

- Verticales: No hay, ya que $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

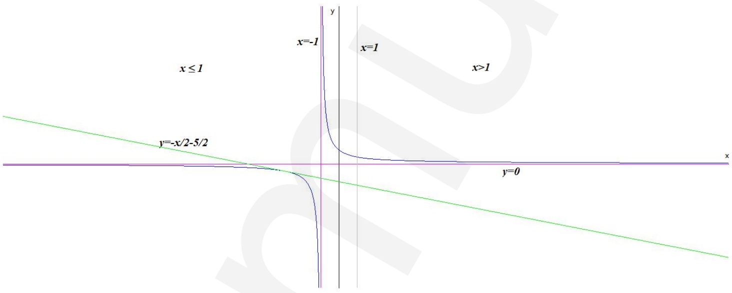
- Horizontales: $y = 0$.

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

c) $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x \le 1, \ \ x \neq -1 \\ \\ -\dfrac{x\ln x - x + 1}{x(x-1)^2} & \text{si} \quad\quad\quad x > 1 \end{cases}$. Como $x_0 < 1 \Longrightarrow$
$f'(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^2} \Longrightarrow f'(x_0) = -\dfrac{2}{(x_0+1)^2} = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow$
$x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0 \Longrightarrow x_0 = -3$ y $x_0 = 1$, esta última no es válida ya que $x_0 < 1$.
En $x_0 = -3 \Longrightarrow f(-3) = \frac{2}{-3+1} = -1 \Longrightarrow (-3, -1)$ es el punto de tangencia. Luego la ecuación de la recta tangente es

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x+3) \Longrightarrow y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$$



Problema 3 *(2,5 puntos)* Se consideran los puntos $A(3,1,2)$, $B(0,3,4)$ y $P(-1,1,0)$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Determinar las coordenadas de un punto Q sabiendo que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes, tienen sentidos opuestos y tienen el mismo módulo.

b) (1 punto) Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta r que contiene a A y P, y de la recta s que contiene a B y al punto $C(2,-1,-2)$.

c) (0,75 puntos) Calcular el coseno del ángulo formado por $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}=(-3,2,2)$ y $\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{AB}=(3,-2,-2)$. Tenemos $\overrightarrow{PQ}=Q-P\Longrightarrow Q=P+\overrightarrow{PQ}=(-1,1,0)+(3,-2,-2)\Longrightarrow Q(2,-1,-2)$.

b) Tenemos:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AP}=(-4,0,-2)=-2(2,0,1)\\ P_r=A(3,1,2)\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=3+2\lambda\\ y=1\\ z=2+\lambda\end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{BC}=(2,-4,-6)=2(1,-2,-3)\\ P_s=B(0,3,4)\end{array}\right.\Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=\mu\\ y=3-2\mu\\ z=4-3\mu\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}x=3+2\lambda=\mu\\ y=1=3-2\mu\\ z=2+\lambda=4-3\mu\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda=-1\\ \mu=1\end{array}\right.\Longrightarrow H(1,1,1)$$

c) $\overrightarrow{PA}=(4,0,2)\Longrightarrow\left|\overrightarrow{PA}\right|=2\sqrt{5}$, $\overrightarrow{PB}=(1,2,4)\Longrightarrow\left|\overrightarrow{PB}\right|=\sqrt{21}$ y $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4+0+8=12$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PB}\right|}=\frac{12}{2\sqrt{5}\sqrt{21}}=\frac{6}{\sqrt{105}}=\frac{6\sqrt{105}}{105}$$

$$\alpha=54^{\circ}9'32''$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* En un instituto, uno de cada cuatro alumnos practica baloncesto. Se eligen 6 alumnos al azar y se considera la variable aleatoria X que representa el número de estudiantes entre estos 6 que practican baloncesto. Se pide:

a) (1 punto) Identificar la distribución de la variable aleatoria X y calcular $P(X=0)$.

b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 5 de los 6 elegidos practiquen baloncesto.

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 1 de los 6 practique baloncesto.

Solución:

a) Es una distribución binomial $X\sim B(6;0,25)$.

$$P(X=0)=\binom{6}{0}0,25^0\cdot 0,75^6=0,177979$$

b) $P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) = \binom{6}{5} 0,25^5 \cdot 0,75^1 + \binom{6}{6} 0,25^6 \cdot 0,75^0 = 0,004639$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,177979 = 0,822021$

Examen de Matemáticas II (Modelo 2021) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dados la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix}$ y el vector $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine el valor o valores de a para los que:

a) (1,5 puntos) El sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ no tenga solución.

b) (1 punto) $A = A^{-1}$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & -3 & a & 1 \\ a-1 & -3 & a & 2 \end{array}\right); \quad |A| = 3 - a = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 = F_2 \\ F_2 = F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 3F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) $A = A^{-1} \Longrightarrow A^2 = I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elegimos del producto la segunda fila de la primera matriz por la segunda columna de la segunda matriz y tiene que dar uno:

$$a + 9 - 3a = 1 \Longrightarrow a = 4$$

Como sólo da un valor este debe de ser único. Comprobamos que con este valor se cumple el enunciado:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = x^6 - 4x^4$, se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) (1 punto) Encontrar sus máximos y mínimos relativos, y determinar si son o no absolutos.

c) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por el eje $y = 0$ y la gráfica de f.

Solución:

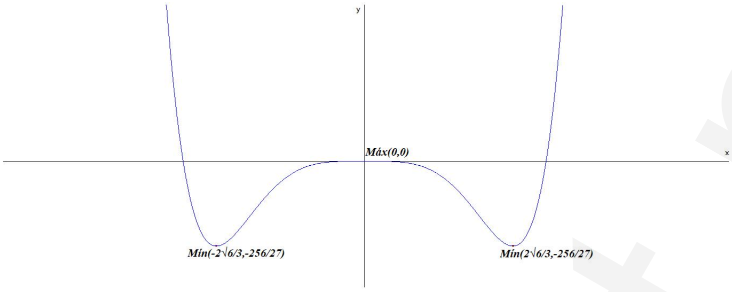
a) $f'(x) = 6x^5 - 16x^3 = 2x^3(3x^2 - 8) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

	$\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$	$\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, 0\right)$	$\left(0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$	$\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, +\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, +\infty\right)$, y decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

b) Tiene un mínimos relativos en los puntos de abscisa $x = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$ y un máximo en el punto de abscisa $x = 0$.
Tenemos que f es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser un polinomio y tenemos que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} = \infty$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} = \infty$, luego el máximo es relativo. Por el

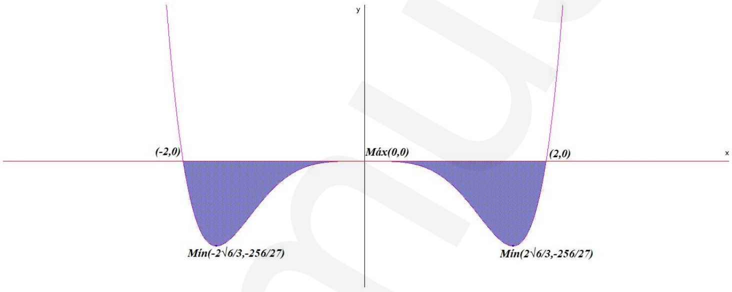
contrario, los mínimos si son relativos.



c) $f(x) = x^6 - 4x^4 = x^4(x^2 - 4) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm 2$. Tenemos dos recintos $S_1 : [-2, 0]$ y $S_2 : [0, 2]$ y como la función es par estas dos áreas son iguales.

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (x^6 - 4x^4)\, dx = \left.\frac{x^7}{7} - \frac{4x^5}{5}\right]_{-2}^{0} = -\frac{2^8}{35}$$

$$S = 2|S_1| = \frac{2^9}{35} = \frac{512}{35}\ u^2$$



Problema 3 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{array} \right.$, $s : \left\{ \begin{array}{l} x = -3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$,

se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la distancia del origen a la recta s.

b) (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de r y s.

c) (0,75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene a la recta r y al vector perpendicular a r y a s.

d) (0,75 puntos) Escribir la ecuación de una recta perpendicular común a r y a s.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2, -1, 1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{array} \right.$$

$$s:\begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} \Longrightarrow s:\begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(2,-1,1) \\ P_s(-3,2,1) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{OP_s}=(-3,2,1)$ y

$$\left|\overrightarrow{u_s}\times\overrightarrow{OP_s}\right| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}| = |(-3,-5,1)| = \sqrt{35}$$

$$d(O,s)=\frac{\left|\overrightarrow{u_s}\times\overrightarrow{OP_s}\right|}{|\overrightarrow{u_s}|}=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{210}}{6}$$

b) $\overrightarrow{P_rP_s}=(-4,0,1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan } r \not\parallel s.$$

c) $$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(0,4,4)=4(0,1,1)$$

$$\pi_1:\begin{cases} \overrightarrow{u_t}=(0,1,1) \\ \overrightarrow{u_r}=(-2,-1,1) \\ P_r(1,2,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1:\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0\Longrightarrow$$

$\pi_1: x-y+z+1=0$

d) Como intersección de dos planos. Uno de ellos sería el calculado en el apartado anterior y el otro sería:

$$\pi_2:\begin{cases} \overrightarrow{u_t}=(0,1,1) \\ \overrightarrow{u_s}=(2,-1,1) \\ P_s(-3,2,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2:\begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0\Longrightarrow$$

$\pi_2: x+y-z+2=0$

$$t:\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Una prueba diagnóstica para una enfermedad da resultado negativo el 5 % de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da resultado positivo el 10 % de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada diez mil personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule la probabilidad de:

a) (0,5 puntos) Que la prueba dé resultado positivo.

b) (0,75 puntos) Que la persona padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido positivo.

c) (0,75 puntos) Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido negativo.

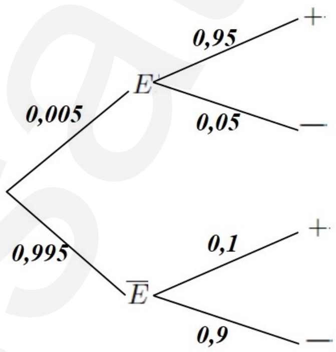
d) (0,5 puntos) Que el resultado de la prueba diagnóstica sea erróneo.

Solución:

E: enfermo, $\overline{E}$: no enfermo, $+$: positivo y $-$: negativo.

$P(-|E) = 0,05$, $P(+|\overline{E}) = 0,10$ y $P(E) = \dfrac{50}{10000} = 0,005$

a) $P(+) = P(+|E)P(E) + P(+|\overline{E})P(\overline{E}) =$
$0,95 \cdot 0,005 + 0,10 \cdot 0,995 = 0,10425$



b) $P(E|+) = \dfrac{P(+|E)P(E)}{P(+)} =$
$\dfrac{0,95 \cdot 0,005}{0,10425} = 0,0456$

c) $P(\overline{E}|-) = \dfrac{P(-|\overline{E})P(\overline{E})}{P(-)} =$
$\dfrac{0,90 \cdot 0,995}{1 - 0,10425} = 0,9997$

d) $P(\text{erronea}) = P(E \cap -) + P(\overline{E} \cap +) =$
$P(-|E)P(E) + P(+|\overline{E})P(\overline{E}) = 0,05 \cdot 0,005 + 0,10 \cdot 0,995 = 0,09975$