Problemas de Matemáticas II

Geometría
(PAU 2019-2020)

Prof: **Isaac Musat Hervás**

última actualización:

1 de diciembre de 2020

Índice general

Teoría

0.1. Resúmenes teóricos

Vectores

Sean $\overrightarrow{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\overrightarrow{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\overrightarrow{w}=(w_1,w_2,w_3)$

- $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente independientes si $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$. En caso contrario uno de los vectores es combinación lineal de los otros.

- Producto escalar: $\begin{cases} \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 \\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{u}|\cos\alpha \end{cases}$

- Producto vectorial: $\overrightarrow{t}=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$; el vector $\overrightarrow{t}$ es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Se cumple $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\sin\alpha$.
  $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=S$ donde S es el área del paralelogramo que describen los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ por paralelelismo. (El área de un triángulo será $\dfrac{1}{2}S$)

- Producto mixto: $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=V$, donde V es el volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores por paralelismo. El volumen de un paralelepípedo es también $V=S_{\text{base}}\cdot$Altura. Para calcular el volumen de un tetraedro tenemos dos fórmulas: $V_{\text{tetraedro}}=\frac{1}{6}V_{\text{paralelepípedo}}$ y $V_{\text{tetraedro}}=\frac{1}{3}S_{\text{base}}\cdot$ Altura

Ecuaciones

Sea la recta $r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(u_1,u_2,u_3) \\ P_r(a,b,c) \end{cases}$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\overrightarrow{x}=P_r+\lambda\overrightarrow{u_r}$	$\begin{cases} x=a+\lambda u_1 \\ y=b+\lambda u_2 \\ z=c+\lambda u_3 \end{cases}$	$\dfrac{x-a}{u_1}=\dfrac{y-b}{u_2}=\dfrac{z-c}{u_3}$	No hay

Sea el plano $\pi:\begin{cases} \overrightarrow{u}=(u_1,u_2,u_3) \\ \overrightarrow{v}=(v_1,v_2,v_3) \\ P(a,b,c) \end{cases}$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\overrightarrow{x}=P+\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}$	$\begin{cases} x=a+\lambda u_1+\mu v_1 \\ y=b+\lambda u_2+\mu v_2 \\ z=c+\lambda u_3+\mu v_3 \end{cases}$	No hay	$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-a \\ u_2 & v_2 & y-b \\ u_3 & v_3 & z-c \end{vmatrix}=0$ $Ax+By+Cz+D=0$

Ideas:

- Tres puntos $P_1(a_1,b_1,c_1)$, $P_2(a_2,b_2,c_2)$ y $P_3(a_3,b_3,c_3)$ no están alineados si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$
- El vector $\overrightarrow{u_r}$ y la recta r tienen la misma dirección.
- El vector $\overrightarrow{u_\pi} = (A,B,C)$ y el plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ son perpendiculares.

Posiciones de rectas y planos:

- Dos rectas: $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases}$, $s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{cases}$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$. Construimos la matriz $A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix}$.
  Si Rango$(A) = 3 \Longrightarrow$ Se cruzan.
  Si Rango$(A) = 2$: $\begin{cases} \text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow \text{Se cortan} \\ \text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow \text{Son paralelas} \end{cases}$.
  Si Rango$(A) = 1 \Longrightarrow$ Coinciden.
- De una recta $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases}$ y un plano $\pi : Ax+By+Cz+D = 0$: Se pasa la recta a paramétricas y se sustituye en el plano: $A(a+\lambda u_1) + B(b+\lambda u_2) + C(c+\lambda u_3) + D = 0$ Al resolver esta ecuación pueden ocurrir tres casos:
  a) Encuentro un valor de $\lambda = k \Longrightarrow$ se cortan. El punto de corte se encuentra sustituyendo el valor de λ en la ecuación paramétrica de la recta.
  b) Encuentro infinitos valores de $\lambda \Longrightarrow$ la recta se encuentra contenida en el plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $0 = 0$)
  c) No existen valores de $\lambda \Longrightarrow$ la recta es paralela al plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $7 = 0$)
- De dos planos $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1$ y $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2$. Puede ocurrir:
  a) $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ o $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ o $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ en cualquiera de ellos los dos planos se cortan en una recta.
  b) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$ en este caso son paralelos.
  c) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$ en este caso coinciden.
- De tres planos $\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1$, $\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2$ y $\pi_3 : A_3x+B_3y+C_3z+D_3$. Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y se discute por el teorema de Roché. Si el sistema tiene solución única los tres planos se cortan en un punto. En el caso de que tenga infinitas soluciones se analizan los planos dos a dos. En el caso de que no tenga soluciones se analizan los planos dos a dos.

Fórmulas:

- Distancia entre dos puntos: $d(A,B) = |\overrightarrow{AB}|$

- Distancia de un punto a una recta: $d(P,r)=\dfrac{|\overrightarrow{PP_r}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}$
- Distancia de un punto a un plano: $d(P,\pi)=\dfrac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
- Distancia entre dos rectas que se cruzan: $d(r,s)=\dfrac{|[\overrightarrow{PP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}$
- Ángulo entre dos vectores: $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}$
- Ángulo entre dos rectas: $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_r}|}$
- Ángulo entre dos planos: $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{u_{\pi_1}}\cdot\overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}||\overrightarrow{u_{\pi_2}}|}$
- Ángulo entre una recta y un plano: $\sin\alpha=\dfrac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|}$
- Punto medio de P y Q es $A=\dfrac{P+Q}{2}$
- Punto simétrico de P respecto de Q es $A=2Q-P$
- Esfera: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ es una esfera de centro $C(a,b,c)$ y radio$=r$.

Ideas métricas:

- Punto simétrico de P respecto al plano π:
  - Calculo r que pasa por P perpendicular a π, $\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}$.
  - Calculo el punto de corte P' de r con π.
  - $P''=2P'-P$
- Punto simétrico de P respecto a la recta r:
  - Calculo π perpendicular a r que contenga a P, $\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}$.
  - Calculo el punto de corte P' de r con π.
  - $P''=2P'-P$
- Recta perpendicular a otras dos que se cruzan (y las corta): Se calcula como intersección de los dos planos $\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}\\ \overrightarrow{u_r}\\ P_r\end{array}\right.$, $\pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}\\ \overrightarrow{u_s}\\ P_s\end{array}\right.$
  donde $\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}$
- Recta que pasa por un punto P y corta a dos rectas que se cruzan: Se calcula como intersección de los dos planos

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{P_rP}\\ \overrightarrow{u_r}\\ P_r \text{ o } P\end{array}\right. ,\quad \pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{P_sP}\\ \overrightarrow{u_s}\\ P_s \text{ o } P\end{array}\right.$$

- Recta paralela a un plano π y que corta a otra recta t que a su vez corta a π y que pasa por el punto P:
  - Calculo un plano π' paralelo a π que contenga a P.
  - Calculo P' punto de corte de π' y t.
  - La recta buscada es la que une los puntos P y P'.
- Ecuación de la circunferencia resultante de cortar una esfera con un plano (vertical u horizontal). Si el plano es $z = k$, se sustituye en la ecuación y resulta una circunferencia. Tened cuidado, el centro de esta circunferencia es (a, b, k).
- Plano tangente a una esfera de centro C en el punto de tangencia P: $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{CP} \\ \text{Contiene a } P \end{cases}$
- Encontrar los puntos de una recta r que están a una distancia λ de un punto P: Se calcula la ecuación de una esfera de centro P y radio λ. Se buscan los puntos de corte de esta esfera y la recta r.
- Plano Mediador π entre dos puntos P_1 y P_2: Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, P_1) = d(P, P_2)$.
- Plano Bisector π entre dos planos π_1 y π_2:Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$.

Problemas

0.2. Andalucía

0.2.1. Modelo de 2020

Problema 0.2.1 Considera la recta $r : \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 : x = 0$ y $\pi_2 : y = 0$.

a) Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.

b) Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

Solución:

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 3, 1) \\ P_r(2, 2, 1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Longrightarrow P(2-\lambda, 2+3\lambda, 1+\lambda)$

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \Longrightarrow |2 - \lambda| = |2 + 3\lambda| \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2 - \lambda = 2 + 3\lambda \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow P_1(2, 2, 1) \\ 2 - \lambda = -2 - 3\lambda \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow P(4, -4, -1) \end{cases}$$

b) $t : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0, 0, 1) \\ P_t(0, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{P_tP_r} = (2, 2, 1)$

$[\overrightarrow{P_tP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_t}] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Longrightarrow r$ y t se cruzan.

Problema 0.2.2 Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 2)$ y $C(0, 2, 1)$.

a) Halla el área de dicho triángulo.

b) Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 2)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 1)$

$$S_T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(-3, -2, -1)| = \frac{\sqrt{14}}{2}\ u^2$$

b)

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{-1+2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{15} \Longrightarrow \alpha = 7502'13''$$

0.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.2.3 Siendo $a \neq 0$, considera las rectas

$$r : x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{a} \quad \text{y} \quad s : \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a.

b) Para $a = 2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, a) \\ P_r(1, 2, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + a\lambda \end{array} \right., s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-a, -1, 2) \\ P_s(3, 3, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - a\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = -1 + 2\mu \end{array} \right.$

y $\overrightarrow{P_rP_s} = (2, 1, -2)$

$|A| = [\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_t}] = \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 2 \end{array} \right| = -a^2 + 4 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2.$

- Si $a \neq \pm 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan.
- Si $a = -2 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2$ y Rango$\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{array} \right)$ =Rango$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{array} \right) = 2 \Longrightarrow r$ y s se cortan.
- Si $a = 2 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2$ y Rango$\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{array} \right)$ =Rango$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{array} \right) = 2 \Longrightarrow r$ y s se cortan.

b) Calculamos el punto P de corte entre r y s:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \lambda = 3 - 2\mu \\ 2 + \lambda = 3 - \mu \\ 1 + 2\lambda = -1 + 2\mu \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow P(1, 2, 1)$$

La recta $t \perp r$ y $s \Longrightarrow \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{array} \right| = (4, -6, 1)$

$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (4, -6, 1) \\ P_t(1, 2, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 - 6\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$

Problema 0.2.4 Se considera el punto $A(1, -2, 0)$y la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{array} \right.$

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.

b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 3\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-3, 3, 1) \\ P_r(2, -2, 0) \end{array} \right.$

$\pi \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} \Longrightarrow \pi : -3x + 3y + z + \alpha = 0$, como $A \in \pi \Longrightarrow -3 - 6 + 0 + \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 9 \Longrightarrow \pi : -3x + 3y + z + 9 = 0 \Longrightarrow \pi : 3x - 3y - z - 9 = 0$

b) $\pi': \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(-3,3,1) \\ \overrightarrow{AP_r}=(1,0,0) \\ A(1,-2,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi': y-3z+2=0$

0.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.2.5 Considera el plano $\pi : x-y+az=0$ y la recta $r: \begin{cases} 4x-3y+4z=1 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$

a) Halla a sabiendo que π es paralelo a r.

b) Determina el plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1,2,3)$.

Solución:

$$r: \begin{cases} 4x-3y+4z=1 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x=-2+5\lambda \\ y=-3+8\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(5,8,1) \\ P_r(-2,-3,0) \end{cases} \quad \overrightarrow{u_\pi}=(1,-1,a)$$

a) $\pi \parallel r \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} \perp \overrightarrow{u_r} \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi}\cdot\overrightarrow{u_r}=0 \Longrightarrow 5-8+a=0 \Longrightarrow a=3$

b) $\pi' \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi'}}=\overrightarrow{u_r}=(5,8,1) \Longrightarrow \pi': 5x+8y+z+\alpha=0$. Como $P\in\pi' \Longrightarrow \pi':$ $5+16+3+\alpha=0 \Longrightarrow \alpha=-24 \Longrightarrow \pi': 5x+8y+z-24=0$

Problema 0.2.6 Considera el plano $\pi : x-y+z=2$ y la recta $r: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$.

a) Calcula la distancia entre r y π.

b) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r.

Solución:

a) $r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(2,1,-1) \\ P_r(0,-1,-2) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x=2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2-\lambda \end{cases}$ y $\overrightarrow{u_\pi}=(1,-1,1)$

$\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}=2-1-1=0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_r}\perp\overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow r\parallel\pi$

$$d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|0+1-2-2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\ u$$

b) $\pi': \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi}=(1,-1,1)\overrightarrow{u_r}=(2,1,-1) \\ P_r(0,-1,-2) \end{cases} \Longrightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y+1 & z+2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi': y+z+3=0$

0.3. Aragón

0.3.1. Modelo de 2020

Problema 0.3.1 Se pide:

a) Determine el valor de la constante real m para que los cuatro puntos siguientes:

$$A(1,1,0),\ B(1,3,1),\ C(2,1,-1),\ D(1,m,m)$$

sean coplanarios, es decir, estén en un mismo plano.

b) Determine el área del triángulo que definen los puntos A, B y C.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}=(0,2,1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,0,-1)$ y $\overrightarrow{AD}=(0,m-1,m)$

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & m-1 & m\end{vmatrix}=-m-1=0\Longrightarrow m=-1$$

b)

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|(-2,1,-2)|=\frac{1}{2}\sqrt{9}=\frac{3}{2}\ u^2$$

Problema 0.3.2 Determine la ecuación del plano π que contiene a las dos rectas r y s siguientes:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-2y=-4\\ 3x+2z=4\end{array}\right. \qquad s:x=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$$

Solución:

El problema no tiene sentido si las dos rectas se cruzan o coinciden. Estudiamos su posición relativa.

$$r:\left\{\begin{array}{l} 4x-3y+4z=1\\ 3x-2y+z=0\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-4+2\lambda\\ y=\lambda\\ z=8-3\lambda\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,1,-3)\\ P_r(-4,0,8)\end{array}\right.$$

$$s:x=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}\Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=1-\lambda\end{array}\right.\Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,2,-1)\\ P_s(0,-1,1)\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{P_sP_r}=(-4,0,8)-(0,-1,1)=(-4,1,7)$$

$\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_sP_r}\right]=\begin{vmatrix} -4 & 1 & 7\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=0$ y Rango$(A)=2$ y Rango$\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{pmatrix}$ =Rango$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}=$
$2\Longrightarrow r$ y s se cortan.

La ecuación del plano π que contiene a las dos rectas sería:

$$\pi:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,1,-3)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,2,-1)\\ P_s(0,-1,1)\end{array}\right.\Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y+1 & z-1\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow \pi:5x-y+3z-4=0$$

0.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.3.3 Se considera la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x+z=1\\ 2x+y=3\end{array}\right.$

a) Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto $(0,0,1)$.

b) Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$. Sabiendo que $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(-1,1,1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

Solución:

a)

$$r:\begin{cases} x+z=1\\ 2x+y=3\end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases} x=1-\lambda\\ y=1+2\lambda\\ z=\lambda\end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(-1,2,1)\\ P_r(1,1,0)\end{cases}$$

$$\pi:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(-1,2,1)\\ \overrightarrow{PP_r}=(1,1,-1)\\ P(0,0,1)\end{cases} \Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y & z-1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \pi: x+z-1=0$$

b) $V=|[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}]|=|[\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]|=|(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})|=|(-1,1,1)\cdot(-1,1,1)|=1+1+1=3\ u^3$

0.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.3.4 Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $r:\begin{cases} 3x+y-4z+1=0\\ 2x+y-z+2=0\end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi: 2x-y+3z-1=0$

Solución:

$$r:\begin{cases} 3x+y-4z+1=0\\ 2x+y-z+2=0\end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases} x=1+3\lambda\\ y=-4-5\lambda\\ z=\lambda\end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(3,-5,1)\\ P_r(1,-4,0)\end{cases}$$

$$\pi':\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(3,-5,1)\\ \overrightarrow{u_\pi}=(2,-1,3)\\ P_r(1,-4,0)\end{cases} \Longrightarrow \pi':\begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z\\ 3 & -5 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \pi': 2x+y-z+2=0$$

0.4. Asturias

0.4.1. Modelo de 2020

Problema 0.4.1 Los puntos $A(0,1,0)$ y $B(-1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercero C pertenece a la recta $r:\begin{cases} x=4\\ z=1\end{cases}$. Además la recta que une A y C es perpendicular a la recta r.

a) Determina el punto C.

b) Calcula el área del triángulo.

Solución:

$$r:\begin{cases} x=4\\ z=1\end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases} x=4\\ y=\lambda\\ z=1\end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(0,1,0)\\ P_r(4,0,1)\end{cases} \Longrightarrow C(4,\lambda,1)$$

a) $\overrightarrow{AC}=(4,\lambda,1)-(0,1,0)=(4,\lambda-1,1)$

$$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{u_r}\Longrightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{u_r}=0\Longrightarrow (4,\lambda-1,1)\cdot(0,1,0)=\lambda-1=0\Longrightarrow \lambda=1\Longrightarrow C(4,1,1)$$

b) $\overrightarrow{AB}=(-1,1,1)-(0,1,0)=(-1,0,1)$ y $\overrightarrow{AC}=(4,0,1)$.

$$S_t=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -1 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 1\end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|(0,5,0)|=\frac{5}{2}\ u^2$$

Problema 0.4.2 Dados los puntos $A(2,1,0)$ y $B(1,0,-1)$ y r la recta que determinan. Y sea s la recta definida por $s:\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=0 \end{array}\right.$.

a) Estudia la posición relativa de las rectas.

b) Determina un punto C de la recta s tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-1)=-(1,1,1) \\ P_r=B(1,0,-1) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+\lambda \end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=2-\mu \\ y=\mu \\ z=-\mu \end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(-1,1,-1) \\ P_s(2,0,0) \end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s}=(2,0,0)-(1,0,-1)=(1,0,1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right|=0,\ \left|\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right|=1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{P_rP_s} \\ \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{array}\right)=2 \Longrightarrow$$

Las dos rectas están en el mismo plano, y como $\left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right|=2\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{array}\right)=2 \Longrightarrow r$ y s se cortan.

b) Sea $C(2-\mu,\mu,-\mu)$

$\overrightarrow{AC}=(2-\mu,\mu,-\mu)-(2,1,0)=(-\mu,\mu-1,-\mu),\quad \overrightarrow{CB}=(1,0,-1)-(2-\mu,\mu,-\mu)=(-1+\mu,-\mu,-1+\mu)$

$$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CB} \Longrightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=0 \Longrightarrow (-\mu,\mu-1,-\mu)\cdot(-1+\mu,-\mu,-1+\mu)=0 \Longrightarrow$$
$$-\mu(-1+\mu)+(\mu-1)(-\mu)+(-\mu)(-1+\mu)=-3\mu^2+3\mu=0 \Longrightarrow \mu=0,\ \ \mu=1$$

Si $\mu=0 \Longrightarrow C(2,0,0)$
Si $\mu=1 \Longrightarrow C(1,1,-1)$

0.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.4.3 Dados el punto $A(2,1,1)$ y la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=0 \end{array}\right.$

a) Calcula un vector director de la recta r.

b) La ecuación del plano π que contiene al punto A y a la recta r.

c) La ecuación de la recta s contenida en π que pasa por A y es perpendicular a r.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=2-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,-1) \\ P_r(2,0,0) \end{array}\right.$$

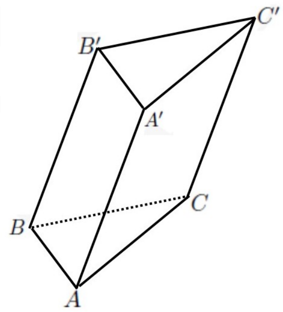
b)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,-1) \\ \overrightarrow{P_rA} = (0,1,1) \\ P_r(2,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : 2x + y - z - 4 = 0$$

c) $\overrightarrow{u_s},\ \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi}$ y $\overrightarrow{u_s} \perp \overrightarrow{u_r} \Longrightarrow \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(0,1,1)$

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (0,1,1) \\ P_s = A(2,1,1) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Problema 0.4.4 Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(1,0,0)$, $B'(-1,2,2)$, $C(0,3,0)$, $C'(0,4,2)$. Y los planos π, al que pertenecen los puntos A, B, C y π', al que pertenecen los puntos A', B', C'. Calcula:



a) Las coordenadas de los puntos restantes: A', B.

b) La distancia entre los planos π y π'.

c) El volumen del prisma triangular.

Solución:

a) $A' = A + \overrightarrow{AA'} = A + \overrightarrow{CC'} = (1,0,0) + [(0,4,2) - (0,3,0)] = (1,1,2) \Longrightarrow A'(1,1,2)$
$B = C + \overrightarrow{CB} = C + \overrightarrow{C'B'} = (0,3,0) + [(-1,2,2) - (0,4,2)] = (-1,1,0) \Longrightarrow B(-1,1,0)$

b)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2,1,0) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,3,0) \\ A(1,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : -5z = 0 \Longrightarrow \pi : z = 0$$

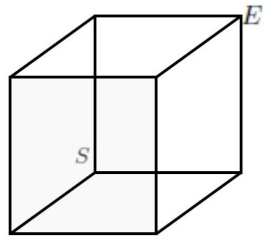
$$d(\pi, \pi') = d(C', \pi) = \frac{|0+0+2|}{\sqrt{0+0+1}} = 2\ u$$

c)

$$V = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}\right]\right| = \frac{1}{2}| \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} | = \frac{1}{2}|-10| = 5\ u^3$$

0.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.4.5 Sean $A(2,1,0)$, $B(5,5,0)$ y $C(2,1,5)$ tres vértices de la cara S de un cubo (cuadrados iguales) y $E(-2,4,0)$ un vértice de la cara opuesta. Se pide:



a) El cuarto vértice D de la cara S.

b) La ecuación del plano π que contiene la cara opuesta de S.

c) ¿Cuál es el vértice de la cara S adyacente a E?

Solución:

a) Como no conocemos el orden de los puntos calculamos distancias entre ellos. Como se trata de un cuadrado las distancias de los lados deben de ser iguales. $d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(3,4,0)| = 5$, $d(A,C) = \left|\overrightarrow{AC}\right| = |(0,0,5)| = 5$, $d(B,C) = \left|\overrightarrow{BC}\right| = |(-3,-4,5)| = \sqrt{30}$. Luego $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son dos lados y $\overline{BC}$ es una diagonal. Luego el punto D está en la diagonal cuyo otro extremo es A. Tendríamos:

$$D = A + \overrightarrow{AD} = A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = (2,1,0) + ((3,4,0) + (0,0,5)) = (5,5,5) \Longrightarrow D(5,5,5)$$

b)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3,4,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0,0,5) \\ A(2,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : 4x - 3y - 5 = 0$$

$$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_{\pi'}} = (4,-3,0) \Longrightarrow 4x - 3y + \lambda = 0$$

$$E \in \pi' \Longrightarrow -8 - 12 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 20 \Longrightarrow \pi' : 4x - 3y + 20 = 0$$

c) La distancia desde E a su adyacente tiene que ser 5, probando tenemos $d(E,A) = \left|\overrightarrow{EA}\right| = |(4,-3,0)| = 5$. Luego el punto adyacente al E es A.

Problema 0.4.6 Dados dos planos $\begin{cases} \pi : x + y - 2z = 3 \\ \pi' : x - z = 5 \end{cases}$. Sea P un punto de π cuya proyección ortogonal sobre π' es el punto $A(5,1,0)$

a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r que une P y A.

b) Calcula el punto P.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi'}} = (1,0,-1) \\ P_r = A(5,1,0) \end{cases} \Longrightarrow (x,y,z) = (5,1,0) + \lambda(1,0,-1) \ \forall\lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$$

$$r : \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases} \forall\lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + z = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

b) Buscamos el punto de corte de r con π:

$$(5 + \lambda) + 1 - 2(-\lambda) = 3 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow P(4,1,1)$$

0.5. Cantabria

0.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.5.1 Se emite un rayo láser desde el punto $P(1,2,8)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{v} = (1,2,-3)$. El plano $-x-y+3z=-8$ determina la posición de una lámina de grandes dimensiones.

a) Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.

b) Determina la posición relativa de rayo y lámina.

c) Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

Solución:

a)

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{v} = (1,2,-3) \\ P_r = P(1,2,8) \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = 8-3\lambda \end{array} \right. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $\pi: -x-y+3z=-8 \Longrightarrow -(1+\lambda)-(2+2\lambda)+3(8-3\lambda)=-8 \Longrightarrow \lambda = \frac{29}{12} \Longrightarrow r$ y π se cortan en un punto.

c) $\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (1,2,-3) \Longrightarrow \pi': x+2y-3z+\lambda=0$ como $O(0,0,0) \in \pi' \Longrightarrow 0+0-0+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi': x+2y-3z=0$

Problema 0.5.2 Considera los puntos $A(1,2,1)$, $B(2,3,-4)$, $C(4,3,2)$.

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

b) Halla la ecuación del plano que contiene los tres puntos.

c) Calcula el área del triángulo que forman los tres puntos.

Solución:

a)

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (1,1,-5) \\ P_r = A(1,2,1) \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = 1-5\lambda \end{array} \right. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

b)

$$\pi: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,1,-5) \\ \overrightarrow{AC} = (3,1,1) \\ A(1,2,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi: \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi: 3x-8y-z+14=0$$

c)

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}| \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{array} \right| | = \frac{1}{2}|2(3,-8,1)| = \sqrt{74}\ u^2$$

0.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.5.3 Considera los puntos $A(2,1,5)$, $B(3,4,1)$ y la recta $r: \left\{\begin{array}{l} x=3-\lambda \\ y=4-3\lambda \\ z=1-4\lambda \end{array}\right.$

a) Se emite un rayo láser desde el punto A. Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser para que impacte en el punto B.

b) Calcula la ecuación de una recta que pase por B y sea perpendicular al rayo y a la recta r.

c) Calcula la ecuación del plano que contiene al rayo y a la recta r.

Solución:

$$r: \left\{\begin{array}{l} x=3-\lambda \\ y=4-3\lambda \\ z=1-4\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,-3,-4) \\ P_r(3,4,1) \end{array}\right.$$

a)

$$s: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{AB}=(1,3,-4) \\ P_s=A(2,1,5) \end{array}\right. \Longrightarrow s: \left\{\begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=1+3\lambda \\ z=5-4\lambda \end{array}\right. \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

b) $\overrightarrow{u_t}\perp\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{u_t}\perp\overrightarrow{u_r}\Longrightarrow \overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & -4 \end{array}\right|=8(3,-1,0)$

$$t: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(3,-1,0) \\ P_t=B(3,4,1) \end{array}\right. \Longrightarrow s: \left\{\begin{array}{l} x=3+3\lambda \\ y=4-\lambda \\ z=1 \end{array}\right. \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

c)

$$\pi: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,-3,-4) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,3,-4) \\ P_s=A(2,1,5) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi: \left|\begin{array}{ccc} x-2 & y-1 & z-5 \\ -1 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & -4 \end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi: 3x-y-5=0$$

Problema 0.5.4 Considera los puntos $A(1,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(3,5,2)$ y $D(1,1,3)$

a) Halla la ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

b) Comprueba si el punto D está contenido en el plano π.

c) Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución:

a) $\pi: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(3,-2,-3) \\ \overrightarrow{AC}=(2,2,1) \\ A(1,3,1) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi: \left|\begin{array}{ccc} x-1 & y-3 & z-1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi: 4x-9y+10z+13=0$

b) Sustituyendo D en el plano: $4-9+30+13=38\neq 0\Longrightarrow D\notin\pi$

c)

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{(3,-2,-3)\cdot(2,2,1)}{\sqrt{22}\sqrt{9}}=\frac{6-4-3}{3\sqrt{22}}=\frac{-1}{3\sqrt{22}}=\frac{\sqrt{-22}}{66}=-0,0711$$

$$\Longrightarrow \alpha=\arccos(-0,071)=94^\circ 4' 31''$$

0.6. Castilla La Mancha

0.6.1. Modelo de 2020

Problema 0.6.1 Sean la recta $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ el punto $P(3, 1, -1)$ y el plano $\pi : 2x+y-z = 0$

a) Calcula la distancia del punto P a la recta r.

b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P.

Solución:

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3, 1, 2) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}, \ \overrightarrow{P_rP} = (2, 1, 0)$

$|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |(2, -4, -1)| = \sqrt{21}$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \ u$$

b)
- Calculamos $\pi' \parallel \pi / P \in \pi'$:

$$\pi' : 2x + y - z + \lambda = 0 \Longrightarrow 6 + 1 + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -8 \Longrightarrow \pi' : 2x + y - z - 8 = 0$$

- Calculamos Q punto de corte de π' con r:

$$2(1 + 3\lambda) + (\lambda) - (-1 + 2\lambda) - 8 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow Q(4, 1, 1)$$

- Calculamos la recta t que pasa por P y Q:

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{PQ} = (1, 0, 2) \\ P_t = P(3, 1, -1) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

Problema 0.6.2 Dados los puntos $A(1, 2, 0)$; $B(0, -1, 2)$; $C(2, -1, 3)$ y $D(1, 0, 1)$.

a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D.

b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D.

Solución:

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (-1, -3, 2) \\ P_r = A(1, 2, 0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ y $s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{CD} = (-1, 1, -2) \\ P_s = D(1, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow$

$s : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$

$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, -3, 2) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, -2) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x - y - z + 1 = 0$

b) $\overrightarrow{AB}=(-1,-3,2)$, $\overrightarrow{AC}=(1,-3,3)$ y $\overrightarrow{AD}=(0,-2,1)$.

$$V=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]|=|\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2\\ 1 & -3 & 3\\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}|=\frac{|-4|}{6}=\frac{2}{3}\ u^3$$

0.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.6.3 Dados los planos $\pi_1: 2x+y+z-2=0$ y $\pi_2:\left\{\begin{array}{l} x=-1+\lambda-\mu\\ y=-\lambda+\mu\\ z=-2+2\lambda \end{array}\right.$

a) Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.

b) Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3,-3,2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

Solución:

a) $\pi_2:\left\{\begin{array}{l} x=-1+\lambda-\mu\\ y=-\lambda+\mu\\ z=-2+2\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \pi_2:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u}=(1,-1,2)\\ \overrightarrow{v}=(-1,1,0)\\ A(-1,0,-2) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi_2:\begin{vmatrix} x+1 & y & z+2\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \pi_2: x+y+1=0$

$$\cos\alpha==\frac{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}\cdot\overrightarrow{u_{\pi_2}}|}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}|\,|\overrightarrow{u_{\pi_2}}|}=\frac{|(2,1,1)\cdot(1,1,0)|}{\sqrt{6}\sqrt{2}}=\frac{|2+1+0|}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Longrightarrow \alpha=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}=30^\circ$$

b) Puntos de corte de $\pi_1: 2x+y+z-2=0$ con los ejes coordenados:
Con OX hacemos $y=0$ y $z=0\Longrightarrow 2x-2=0\Longrightarrow x=1\Longrightarrow A(1,0,0)$
Con OY hacemos $x=0$ y $z=0\Longrightarrow y-2=0\Longrightarrow y=2\Longrightarrow B(0,2,0)$
Con OZ hacemos $x=0$ e $y=0\Longrightarrow z-2=0\Longrightarrow z=2\Longrightarrow C(0,0,2)$
Calculamos los vectores:
$\overrightarrow{AP}=(3,-3,2)-(1,0,0)=(2,-3,2)$, $\overrightarrow{BP}=(3,-3,2)-(0,2,0)=(3,-5,2)$ y $\overrightarrow{CP}=(3,-3,2)-(0,0,2)=(3,-3,0)$

$$V_t=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{BP},\overrightarrow{CP}\right]\right|==\frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2\\ 3 & -5 & 2\\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix}|=\frac{|6|}{6}=1\ u^3$$

Problema 0.6.4 Dados el plano $\pi:\left\{\begin{array}{l} x=-1+\mu\\ y=1+\lambda+a\mu\\ z=1+2\lambda-\mu \end{array}\right.$ la recta $s:\left\{\begin{array}{l} x-2y=1-b\\ z=-3 \end{array}\right.$

a) Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π.

b) Si $a=0$ y $b=3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1,-1,-8)$ es paralela al plano π y es perpendicular a la recta s.

Solución:

a) $\pi : \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 1 + \lambda + a\mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{cases} \overrightarrow{u} = (0, 1, 2) \\ \overrightarrow{v} = (1, a, -1) \\ A(-1, 1, 1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$\pi : -(2a+1)x + 2y - z - 2(a+1) = 0$

$s : \begin{cases} x - 2y = 1 - b \\ z = -3 \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 1 - b + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, 1, 0) \\ P_s(1 - b, 0, -3) \end{cases}$ Si $s \subset \pi \Longrightarrow$

$\overrightarrow{u_s} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_s} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 0 \Longrightarrow (-(2a+1), 2, -1) \cdot (2, 1, 0) = -2(2a+1) + 2 + 0 = -4a - 2 + 2 = 0 \Longrightarrow a = 0$

Si $a = 0 \Longrightarrow \pi : -x + 2y - z - 2 = 0$ Para calcular b sustituimos la recta P_s en el plano ya que $P_s \in \pi \Longrightarrow -(1 - b) + 0 - (-3) - 2 = 0 \Longrightarrow b = 0$

b) Si $a = 0$ y $b = 3 \Longrightarrow \pi : -x + 2y - z - 2 = 0$ y $s : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (-1, 2, -1)$ y $\overrightarrow{u_s} = (2, 1, 0)$.

La recta $r \perp s$ y $r \parallel \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -2, -5)$

$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 0, -1) \\ P_r = P(1, -1, -8) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = -8 - 5\lambda \end{cases}$

0.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.6.5 Sea el plano $\pi : x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

a) Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π.

b) Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π, y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

Solución:

$r : \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 1) \\ P_r(2, 0, -2) \end{cases}$

a)

$$d(P, \pi) = \frac{|1 + 4 + 1 - 4|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\ u$$

b) Calculamos el punto de corte A de r con π

$$(2 + 2\lambda) + 2(\lambda) - (-2 + \lambda) - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow A(2, 0, -2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1, -1, 2) - (2, 0, -2) = (-1, -1, 4), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, 1) - (2, 0, -2) = (-2, 1, 3)$$

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|(-7, -5, 3)| = \frac{\sqrt{83}}{2}\ u^2$$

Problema 0.6.6 Dadas las rectas $r : \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$, $s : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1, 0, 2)$.

a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s.

b) Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s.

Solución:

$$r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 0) \\ P_r(2, 0, 0) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (3, -2, 1) \\ P_s(0, -2, 1) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (0, -2, 1) - (2, 0, 0) = (-2, -2, 1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) $$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{u_s} = (3, -2, 1) \\ P(-1, 0, 2) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x - y - 5z + 11 = 0$$

0.7. Castilla León

0.7.1. Modelo de 2020

Problema 0.7.1 Dada la recta $r : x + 2 = y = z - 2$ y el plano $\pi : x - z + 2 = 0$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π.

b) Calcular el punto simétrico respecto de π del punto de r $(-2, 0, 2)$ y hallar la recta que es simétrica de r respecto del plano π.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ P_r(-2, 0, 2) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

a) Sustituyendo r en $\pi \Longrightarrow (-2 + \lambda) + 0(\lambda) - (2 + \lambda) + 2 = 0 \Longrightarrow -2 = 0$ lo que es imposible y, por tanto, la recta r y el plano π no tienen ningún punto en común y son paralelos. $(r \parallel \pi)$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P(-2, 0, 2) \in t$

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 0, -1) \\ P_t = P(-2, 0, 2) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto P' de corte de t y π

$$-2 + \lambda - (2 - \lambda) + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P'(-1, 0, 1)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el simétrico P'' buscado

$$\frac{P+P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = (-2,0,2) - (-2,0,2) = (0,0,0)$$

Como la recta $r \parallel \pi$ la recta simétrica h de r respecto de π tiene que ser paralela a $r \Longrightarrow \overrightarrow{u_h} = \overrightarrow{u_r}$ y tenemos

$$h: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_h} = \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_h = P''(0,0,0)) \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 0.7.2 Dada la recta $r: x-1 = \frac{y+1}{2} = z-1$ y el plano $\pi: x-y+z=0$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π.

b) Calcular la distancia del plano π al punto de la recta r, $(1,-1,1)$ y hallar el plano paralelo a π situado a la misma distancia de r que π.

Solución:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \\ P_r(1,-1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{array} \right. \text{ y } \overrightarrow{u_\pi} = (1,-1,1)$$

a) Sustituyendo r en $\pi \Longrightarrow (1+\lambda) - (-1+2\lambda) + (1+\lambda) = 0 \Longrightarrow 3 = 0$ lo que es imposible y, por tanto, la recta r y el plano π no tienen ningún punto en común y son paralelos. $(r \parallel \pi)$

b)

$$d(P,\pi) = \frac{|1+1+1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ u$$

Sea $\pi': x-y+z+m=0$ el plano que buscamos. Tenemos $d(r,\pi') = d(\pi,\pi') = \sqrt{3}$

$$d(r,\pi') = d(P,\pi') = \frac{|1+1+1+m|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|3+m|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Longrightarrow |3+m| = 3$$

$$|3+m| = 3 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3+m = 3 \Longrightarrow m = 0 \Longrightarrow \pi'_1: x-y+z=0 \equiv \pi \text{ no vale} \\ 3+m = -3 \Longrightarrow m = -6 \Longrightarrow \pi': x-y+z-6=0 \end{array} \right.$$

0.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.7.3 Sea el plano $\pi: x-2y+2z+1=0$, la recta $r: \left\{ \begin{array}{l} x-y=0 \\ z+1=0 \end{array} \right.$ y el punto $A(1,3,-1)$.
Hallar la ecuacion del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.
Solución:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,0) \\ P_r(0,0,-1) \end{array} \right.$$

$$\pi': \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,0) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (1,-2,2) A(1,3,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi': \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y-3 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi': 2x-2y-3z+1=0$$

Problema 0.7.4 Dado el punto $A(1,2,4)$ y la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$,

a) Hallar un punto B de la recta r de forma que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano $\pi : x+2z=0$

b) Hallar un vector (a,b,c) perpendicular a $(1,0,-1)$ y $(2,1,0)$.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,2) \\ P_r(1,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{array} \right.$$

a) $\overrightarrow{u_\pi} = (1,0,2)$ y $B(1+2\lambda, 1+\lambda, 1+2\lambda) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = (1+2\lambda, 1+\lambda, 1+2\lambda) - (1,2,4) = (2\lambda, -1+\lambda, -3+2\lambda)$

$\overrightarrow{AB} \parallel \pi \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 0 \Longrightarrow (2\lambda, -1+\lambda, -3+2\lambda)\cdot(1,0,2) = 2\lambda - 6 + 4\lambda =$

$$6\lambda - 6 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow B(3,2,3)$$

b) $(a,b,c) = (1,0,-1)\times(2,1,0) = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right| = (1,-2,1)$

0.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.7.5 Dado el punto $P(2,1,1)$ y la recta $r : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-4}{-3}$

a) Hallar la recta paralela a r que pase por P.

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r.

Solución:

a) $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_r} = (1,-1,-3) \\ P_s = P(2,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 2+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1-3\lambda \end{array} \right.$

b)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = P(1,-1,-3) \\ \overrightarrow{P_rP} = (2,1,1)-(2,3,4) = (0,-2,-3) \\ P(2,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x-2 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -3 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : -3x + 3y - 2z + 5 = 0$$

Problema 0.7.6 Se pide:

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,2,3)$ y es paralela a la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x-y-z-1=0 \\ x+y+z-3=0 \end{array} \right.$

b) Calcular el punto simétrico del $(1,2,3)$ respecto del plano $\pi : 3x+2y+z+4=0$

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} x - y - z - 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow, r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (0, -1, 1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{array} \right.$

$$s \parallel r,\ P(1,2,3) \in s \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_r} = (0, -1, 1) \\ P_s = P(1, 2, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{array} \right.$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P(1, 2, 3) \in t$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (3, 2, 1) \\ P_t = P(1, 2, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto P' de corte de t y π

$$3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + (3 + \lambda) + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow P'(-2, 0, 2)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el simétrico P'' buscado

$$\frac{P + P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = (-4, 0, 4) - (1, 2, 3) = (-5, -2, 1) \Longrightarrow P''(-5, -2, 1)$$

0.8. Cataluña

0.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.8.1 Se pide:

a) Calcular la ecuación general de un plano π que pasa por el punto $(8, 8, 8)$ y tiene por vectores directores $\overrightarrow{u} = (1, 2, -3)$ y $\overrightarrow{v} = (-1, 0, 3)$.

b) Determinar el valor del parámetro real a para que el punto $(1, -5, a)$ pertenezca al plano π y calcule la ecuación paramétrica de la recta que pasa por ese punto y es perpendicular al plano π.

Solución:

a)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (1, 2, -3) \\ \overrightarrow{v} = (-1, 0, 3) \\ P(8, 8, 8) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x - 8 & y - 8 & z - 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 3x + z - 32 = 0$$

b) $(1, -5, a) \in \pi \Longrightarrow 3 + 0 + a - 32 = 0 \Longrightarrow a = 29$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (3, 0, 1) \\ P_s(1, -5, 29) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda \\ y = -5 \\ z = 29 + \lambda \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

0.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.8.2 Un avión se desplaza desde un punto $A(0,3,1)$ hacia una plataforma plana de ecuación $\pi : x - 2y + z = 1$ siguiendo una recta r paralela al vector $\overrightarrow{v} = (1,-1,0)$

a) Calcular las coordenadas del punto de contacto B del avión con el plano y la distancia recorrida.

b) Calcule la ecuación general del plano perpendicular a la plataforma y que contiene la recta r seguida por el avión desde el punto A.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{v} = (1,-1,0) \\ P_r = A(0,3,1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Calculamos el punto de corte de r con π

$$(\lambda) - 2(3 - \lambda) + 1 = 1 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow B(2,1,1)$$

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(2,1,1) - (0,3,1)| = |(2,-2,0)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ u$$

b)

$$\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1,-2,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,-1,0) \\ P_r(0,3,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x & y-3 & z-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : x + y + z - 4 = 0$$

Problema 0.8.3 Sean las rectas r y s, expresadas por $\dfrac{x-3}{2} = y = z - 1$ y $(\mu, -\mu, \mu)$, respectivamente.

a) Determinar la posición relativa de las rectas.

b) Calcular la distancia entre las rectas r y s.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,1) \\ P_r(3,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$

$s : \left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = \mu \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,-1,1) \\ P_s(0,0,0) \end{array} \right.$ y $\overrightarrow{P_sP_r} = (3,0,1)$

$\left[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \left| \begin{array}{ccc} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan. ($\not\parallel$)

b) $|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = \left| \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| \right| = |(2,-1,3)| = \sqrt{14}$

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}\ u$$

0.9. Comunidad valenciana

0.9.1. Modelo de 2020

Problema 0.9.1 Se da el plano $\pi : 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P(10, 0, 10)$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia del punto P al plano π.

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas.

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C.

Solución:

a) $d(P, \pi) = \dfrac{|20 + 0 + 20 - 8|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \dfrac{32}{3}\ u$

b) Puntos de corte de $\pi : 2x + y + 2z = 8$ con los ejes coordenados:
Con OX hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow 2x = 8 \Longrightarrow x = 4 \Longrightarrow A(4, 0, 0)$
Con OY hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow y = 8 \Longrightarrow B(0, 8, 0)$
Con OZ hacemos $x = 0$ e $y = 0 \Longrightarrow 2z = 8 \Longrightarrow z = 4 \Longrightarrow C(0, 0, 4)$

c) Calculamos los vectores:
$\overrightarrow{AP} = (10, 0, 10) - (4, 0, 0) = (6, 0, 10)$, $\overrightarrow{BP} = (10, 0, 10) - (0, 8, 0) = (10, -8, 10)$ y $\overrightarrow{CP} = (10, 0, 10) - (0, 0, 4) = (10, 0, 6)$

$$V_t = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CP}\right]\right| == \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 10 & -8 & 10 \\ 10 & 0 & 6 \end{vmatrix}| = \frac{|512|}{6} = \frac{256}{3}\ u^3$$

Problema 0.9.2 Se dan en el espacio la recta $r : \dfrac{x - \alpha}{-1} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z}{\beta}$ el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β.

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$.

c) La ecuación del plano que pasa por $(0, 0, 0)$ y que no corta al plano π.

Solución:

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, -4, \beta) \\ P_r(\alpha, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \alpha - \lambda \\ y = -4\lambda \\ z = \beta\lambda \end{cases}$ Sustituimos en π

$$(\alpha - \lambda) + 2(-4\lambda) + 3(\beta\lambda) = 6 \Longrightarrow -9\lambda + 3\beta\lambda = 6 - \alpha \Longrightarrow (-9 + 3\beta)\lambda = 6 - \alpha$$

- Si $\alpha = 6$ y $\beta = 3 \Longrightarrow 0 = 0 \Longrightarrow r \subset \pi$
- Si $\alpha \neq 6$ y $\beta = 3 \Longrightarrow 0 = 6 - \alpha \neq 0 \Longrightarrow r \parallel \pi$
- Si $\alpha \neq 6$ y $\beta \neq 3 \Longrightarrow \lambda = \frac{6-\alpha}{-9+3\beta} \Longrightarrow r$ y π se cortan.

b) Por el apartado anterior si $\alpha = 6$ y $\beta = 3 \Longrightarrow 0 = 0 \Longrightarrow r \subset \pi$ y $d(r, \pi) = 0$

c) Si el plano π' no corta al plano $\pi \iff \pi' \parallel \pi \Longrightarrow \pi' : x + 2y + 3z + m = 0$ como $O \in \pi' \Longrightarrow 0 + 0 + 0 + m = 0 \Longrightarrow \pi' : x + 2y + 3z = 0$

0.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.9.3 Sea la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$ y los puntos $P(1,0,0)$ y $Q(2,1,\alpha)$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r.

b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando $\alpha = 1$.

c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando $\alpha = 1$.

Solución:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ P_r(1,-1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right. \text{ y } s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{PQ} = (1,1,\alpha) \\ P_s(1,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = \alpha\lambda \end{array} \right.$$

a) $\overrightarrow{u_r} = k\overrightarrow{u_s} \Longrightarrow (1,1,-1) = k(1,1,\alpha) \Longrightarrow k = 1$ y $\alpha = -1$.

b) $$\pi: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ P(1,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi: \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi: x - y - 1 = 0$$

c) $\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \Longrightarrow \pi': x + y - z + m = 0$.
Como $P \in \pi' \Longrightarrow 1 + 0 + 0 + m = 0 \Longrightarrow m = -1 \Longrightarrow \pi': x + y - z - 1 = 0$

$$d(Q,\pi') = \frac{|2+1-1-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ u$$

Problema 0.9.4 Se dan el plano $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos $A(1,2,-1)$, $B(2,1,0)$
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π.

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A. Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r.

c) La distancia entre el punto B y la recta r.

Solución:

a) $$\pi': \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2,1,-1) \\ A(1,2,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi: \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi: y + z - 1 = 0$$

b) $$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,1,-1) \\ P_r = A(1,2,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -1-\lambda \end{array} \right.$$

c) $\overrightarrow{BP_r} = (1,2,-1) - (2,1,0) = (-1,1,-1)$

$$\left|\overrightarrow{BP_r} \times \overrightarrow{u_r}\right| = \left| \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \right| \right| = |(0,-3,-3)| = 3\sqrt{2}.$$

$$d(B,r) = \frac{\left|\overrightarrow{BP_r} \times \overrightarrow{u_r}\right|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}\ u$$

0.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.9.5 Se dan los planos $\pi : x + y = 1$ y $\pi' : x - y + z = 1$ y el punto $P(1, -1, 0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto P y es paralela a los planos π y π'.

b) La distancia de la recta r a cada uno de los planos π y π'.

c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como interseccion de los planos π y π'.

Solución:

a) Tenemos $\overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{u_{\pi'}} = (1, -1, 1) \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u_{\pi'}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -2)$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -1, -2) \\ P_r = P(1, -1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = -2\lambda \end{array} \right.$$

b) $d(P, \pi) = \dfrac{|1 - 1 + 0 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 0}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ u$

$d(P, \pi') = \dfrac{|1 + 1 + 0 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\ u$

c) $s : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, 2) = -(1, -1, -2) \\ P_s(1, 0, 0) \end{array} \right.$

Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi'' \perp s / P \in \pi''$:

  $$\pi'' : x - y - 2z + m = 0 \Longrightarrow 1 + 1 - 0 + m = 0 \Longrightarrow m = -2 \Longrightarrow \pi'' : x - y - 2z - 2 = 0$$

- Calculamos el punto de corte de s con π'':

  $$(1 - \lambda) - \lambda - 2(2\lambda) - 2 = 0 \Longrightarrow m = -\frac{1}{6} \Longrightarrow A\left(1 + \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}\right) = A\left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$$

- Calculamos la recta t que pasa por A y P:

  $$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{AP} = (1, -1, 0) - \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}(-1, -5, 2) \\ \\ P_t = P(1, -1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

  $$t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = -1 - 5\lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right.$$

Problema 0.9.6 Se dan las rectas $r:\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=2+\lambda\\ z=2\lambda\end{array}\right.$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $s:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$ y el plano $\pi: 3x+ay-z+1=0$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Si hay algún valor del parámetro a para el cual la recta r esta contenida en el plano π.

b) La distancia entre las rectas r y s.

c) El coseno del ángulo que forman la recta r y la recta $t:\left\{\begin{array}{l} 2x-y=0\\ y-z=2\end{array}\right.$.

Solución:

Tenemos:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=2+\lambda\\ z=2\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(0,1,2)\\ P_r(1,2,0)\end{array}\right. \quad s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(2,-1,1)\\ P_s(-1,0,-2)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=-1+2\lambda\\ y=-\lambda\\ z=-2+\lambda\end{array}\right.$$

a) Sustituimos r en π:

$$3x+ay-z+1=0\Longrightarrow 3(1)+a(2+\lambda)-(2\lambda)+1=0\Longrightarrow 2a+a\lambda-2\lambda+4=0\Longrightarrow$$

$$\lambda(a-2)+(2a+4)=0$$

Para que la recta esté contenida en el plano tendría que ocurrir $0=0$, lo cual no se da nunca. Si tomamos $a=2$ quedaría ¡$6=0$! por lo que $r\parallel\pi$ y si $a\neq 2\Longrightarrow \lambda=-\dfrac{2a+4}{a-2}\in\mathbb{R}\Longrightarrow$ la recta r cortaría al plano π. La ningún valor de a la recta estaría contenida en el plano π.

b) Tomamos $\overrightarrow{P_sP_r}=(1,2,0)-(-1,0,-2)=(2,2,2)$

$$\left[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{rrr} 2 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{array}\right|=10\neq 0\Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan. } (\not\parallel)$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\left|\begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{array}\right||=|(3,4,-2)|=\sqrt{29}$$

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{10}{\sqrt{29}}=\frac{10\sqrt{29}}{29}\ u$$

c) $t:\left\{\begin{array}{l} 2x-y=0\\ y-z=2\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l} x=\lambda y=2\lambda\\ z=-2+2\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(1,2,2)\\ P_t(0,0,-2)\end{array}\right.$

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_t}|}{|\overrightarrow{u_r}|\,|\overrightarrow{u_t}|}=\frac{|(0,1,2)\cdot(1,2,2)|}{\sqrt{5}\sqrt{9}}=\frac{6}{3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\ u$$

0.10. Extremadura

0.10.1. Modelo de 2020

Problema 0.10.1 Sean las rectas $r: \left\{ \begin{array}{l} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{array} \right.$ y $s: x-1 = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{2}$

a) Estudie la posición relativa de las dos rectas.

b) Calcule la distancia del punto $P(16,0,0)$ a la recta r.

Solución:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x=-1+4\lambda \\ y=4-2\lambda \\ z=\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(4,-2,1) \\ P_r(-1,4,0) \end{array} \right. \text{ y } s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,3,2) \\ P_s(1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$s: \left\{ \begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=3\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (2,-4,-1)$, $[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}] = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$ y $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \Longrightarrow$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{P_rP_s} \\ \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2 \text{ y Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cortan.}$$

b) $\overrightarrow{PP_r} = (-1,4,0) - (16,0,0) = (-17,4,0)$

$$\left|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}\right| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -17 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}| = |(4,17,18)| = \sqrt{629}.$$

$$d(B,r) = \frac{\left|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}\right|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{629}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{13209}}{21}\ u$$

Problema 0.10.2 Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (1,3,-1)$, $\overrightarrow{v} = (2,0,1)$ y $\overrightarrow{w} = (2,-1,0)$

a) ¿Los tres vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$?

b) Halla el área del triángulo formado por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

c) Halla el vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{w}$ de módulo 1.

Solución:

a) Hay que comprobar si son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \text{ y } \overrightarrow{w} \text{ son linealmente independientes} \Longrightarrow$$

Los tres vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$.

b) $S_t = \dfrac{1}{2}\,|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = \dfrac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}| = \dfrac{1}{2}|3(1,-1,-2)| = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}\ u^2$

c) $\overrightarrow{t}=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=-(1,2,7)\Longrightarrow\left|\overrightarrow{t}\right|=3\sqrt{6}$

$\overrightarrow{h}=\dfrac{\overrightarrow{t}}{\left|\overrightarrow{t}\right|}=-\dfrac{(1,2,7)}{3\sqrt{6}}=\left(-\dfrac{1}{3\sqrt{6}},-\dfrac{2}{3\sqrt{6}},-\dfrac{7}{3\sqrt{6}}\right)=\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{18},-\dfrac{2\sqrt{6}}{18},-\dfrac{7\sqrt{6}}{18}\right)$

$\overrightarrow{h}\perp\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{h}\perp\overrightarrow{w}$ y $\left|\overrightarrow{h}\right|=1$.

0.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.10.3 Sean el plano π de ecuación $2x+y-z-2=0$ y la recta r dada por $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-1}{3}$.

a) Estudie la posición relativa de la recta respecto del plano.

b) Calcule la distancia de la recta al plano.

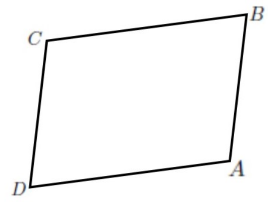
Solución:

a) $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=3(1,-1,1)\\ P_r(0,2,1)\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.$ Sustituyendo en el plano π: $2(\lambda)+(2-\lambda)-(1+\lambda)-2=0\Longrightarrow$ ¡$-1=0$! $\Longrightarrow r\parallel\pi$ (paralelos)

b) $d(r,\pi)=d(P_r\pi)=\dfrac{|0+2-1-2|}{\sqrt{4+1+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}\ u$

Problema 0.10.4 Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son

$A(1,3,-2)$, $B(4,3,1)$ y $C(1,0,1)$, como podemos observar en la siguiente representación:



a) Calcule el cuarto vértice D.

b) Calcule el área del paralelogramo.

Solución:

a) $D=A+\overrightarrow{AD}=A+\overrightarrow{BC}=(1,3,-2)+[(1,0,1)-(4,3,1)]=(1,3,-2)+(-3,-3,0)=(-2,0,-2)$

b) $S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 3 & 0 & 3\\ -3 & -3 & 0\end{vmatrix}|=|9(1,-1,-1)|=9\sqrt{3}\ u^2$

0.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.10.5 Sean los vectores $\overrightarrow{u}=(4,3,\alpha)$, $\overrightarrow{v}=(\alpha,1,0)$ y $\overrightarrow{w}=(2\alpha,1,\alpha)$ (con $\alpha\in\mathbb{R}$)

a) Determine los valores de α para que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ sean linealmente independientes.

b) Para el valor $\alpha=1$ exprese $\overrightarrow{w}$ como combinacion lineal de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2\alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow -4\alpha^2 + 4\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 0 \text{ y } \alpha = 1$
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente independientes $\forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

b) Si $\alpha = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{u} = (4,3,1)$, $\overrightarrow{v} = (1,1,0)$ y $\overrightarrow{w} = (2,1,1)$

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \Longrightarrow (2,1,1) = a(4,3,1) + b(1,1,0) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 = 4a + b \\ 1 = 3a + b \\ 1 = a \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$
$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$$

Problema 0.10.6 Dados el plano π_1 determinado por los puntos $(0,1,1)$, $(2,0,2)$ y $(1,2,6)$ y el plano π_2 dado por la ecuación $x - y + z = 3$. Calcule una recta paralela a los dos planos y que no este contenida en ninguno de ellos.
Solución:
Tenemos $A(0,1,1)$, $B(2,0,2)$ y $C(1,2,6)$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,-1,1) \\ \overrightarrow{AC} = (1,1,5) \\ A(0,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 2x + 3y - z - 2 = 0$$

El vector director de la recta que buscamos será:
$$\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-3,-5)$$
Con la dirección de este vector habrá infinitas rectas que no estén contenidas en los planos π_1 y π_2. Tomamos un punto que no esté contenido en ninguno de ellos, por ejemplo $O(0,0,0)$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,-3,-5) \\ P_r = O(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = -5\lambda \end{array} \right.$$

0.11. Galicia

0.11.1. Modelo de 2020

Problema 0.11.1 Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : mx - y + 2 = 0$ y $\pi_2 : 2x + 3y = 0$ en función del parámetro m.

b) Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$ y $C(0,1,0)$.

Solución:

a) π_1 con $\pi_2 \Longrightarrow \dfrac{m}{2} = \dfrac{-1}{3} \Longrightarrow m = \dfrac{-2}{3}$.
Si $m = \dfrac{-2}{3} \Longrightarrow \pi_1$ y π_2 son paralelos. En caso contrario se cortan.

b) $\pi':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,0,1)\\ \overrightarrow{AC}=(0,1,0)\\ A(0,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\left|\begin{array}{ccc}x&y&z\\1&0&1\\0&1&0\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi':x-z=0$

Problema 0.11.2 Se pide:

a) Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1,-3,0)$ y es perpendicular a la recta $\left\{\begin{array}{l}x-y+2z=1\\ y-z=0\end{array}\right.$

b) Calcula la distancia del punto $Q(1,1,1)$ al plano $\pi:-x+y+z+4=0$ y el punto simétrico de Q respecto de π.

Solución:

a) $r:\left\{\begin{array}{l}x-y+2z=1\\ y-z=0\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1-\lambda\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,1)\\ P_r(1,0,0)\end{array}\right.$

$\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(-1,1,1)\Longrightarrow \pi:-x+y+z+m=0$ como $P\in\pi\Longrightarrow -1-3+0+m=0\Longrightarrow m=4\Longrightarrow \pi:-x+y+z+4=0$

b) $d(Q,\pi)=\dfrac{|-1+1+1+4|}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\ u$

Para calcular el punto simétrico seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t\perp\pi/Q\in t\Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_\pi}=(-1,1,1)\\ P_t=Q(1,1,1)\end{array}\right. \Longrightarrow$

  $t:\left\{\begin{array}{l}x=1-\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.$

- Calculamos el punto de corte de t con π:

$$-(1-\lambda)+(1+\lambda)+(1+\lambda)+4=0\Longrightarrow\alpha=-\frac{5}{3}\Longrightarrow Q'\left(\frac{8}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

- $\dfrac{Q+Q''}{2}=Q'\Longrightarrow Q''=2Q'-Q=\left(\dfrac{16}{3},-\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3}\right)-(1,1,1)=\left(\dfrac{13}{3},-\dfrac{7}{3},-\dfrac{7}{3}\right)$

0.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.11.3 Se pide:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ y $C(7,1,5)$.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano $\pi:4x+2y-3z-15=0$ y que pasa por el punto $P(-1,-2,2)$

Solución:

a) $\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,2)\\ \overrightarrow{AC}=(4,1,6)\\ A(3,0,-1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x-3&y&z+1\\1&1&2\\4&1&6\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi:4x+2y-3z-15=0$

b) $r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}=(4,2,-3)\\ P_r=P(-1,-2,2)\end{cases}\Longrightarrow r:\begin{cases}x=-1+4\lambda\\ y=-2+2\lambda\\ z=2-3\lambda\end{cases}$

Problema 0.11.4 Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$ y $s:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Solución:

$r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(2,-1,-2)\\ P_r(3,0,-1)\end{cases}\Longrightarrow r:\begin{cases}x=3+2\lambda\\ y=-\lambda\\ z=-1-2\lambda\end{cases}$, $s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=(1,4,3)\\ P_s(0,-3,-2)\end{cases}\Longrightarrow s:\begin{cases}x=\mu\\ y=-3+4\mu\\ z=-2+3\mu\end{cases}$

y $\overrightarrow{P_sP_r}=(3,0,-1)-(0,-3,-2)=(3,3,1)$

$\left[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\begin{vmatrix}3&3&1\\2&-1&-2\\1&4&3\end{vmatrix}=0$ y $\begin{vmatrix}3&3\\2&-1\end{vmatrix}=-9\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}\overrightarrow{P_sP_r}\\ \overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{pmatrix}=2$ (las dos rectas están en el mismo plano)

Como $\begin{vmatrix}2&-1\\1&4\end{vmatrix}=9\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{pmatrix}=2\Longrightarrow r$ y s se cortan.

Calculamos el punto de corte: $\begin{cases}3+2\lambda=\mu\\ -\lambda=-3+4\mu\\ -1-2\lambda=-2+3\mu\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\lambda=-1\\ \mu=1\end{cases}\Longrightarrow P(1,1,1)$

0.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.11.5 Sean r la recta de vector director $\overrightarrow{d_r}=(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ y $\pi:-2x+y+z=0$. Se pide la posicion relativa de r y π. En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

Solución:

$r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(1,0,3)\\ P_r(1,0,0)\end{cases}\Longrightarrow r:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=0\\ z=3\lambda\end{cases}$. Sustituimos en π y tenemos: $-2(1+\lambda)+0+3\lambda=0\Longrightarrow\lambda=2\Longrightarrow r$ y π se cortan.

El punto de corte será $A(3,0,6)$.

Problema 0.11.6 Se pide:

a) Calcule k sabiendo que los vectores $\overrightarrow{u}=(2,0,0)$, $\overrightarrow{v}=(0,k,1)$ y $\overrightarrow{w}=(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por $P(1,0,0)$ y contiene a $r:x-1=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+1}{3}$

Solución:

a) $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&k&1\\2&2&2\end{vmatrix}=0\Longrightarrow 2(2k-2)=0\Longrightarrow k=1$

b) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -4, 3) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases}$ y $\overrightarrow{PP_r} = (1, 0, -1) - (1, 0, 0) = (0, 0, -1)$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{PP_r} = (0, 0, -1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, -4, 3) \\ P(1, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : 4x + y - 4 = 0$$

0.12. Islas Baleares

0.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.12.1 Considera el punto $P(2, -1, 1)$ y la recta definida por

$$r : \begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

a) Calcula la expresión de la ecuación continua de la recta.

b) Calcula la ecuación del plano, π, perpendicular a la recta r que pasa por el punto P.

c) Calcula el punto, Q, de intersección del plano π con la recta r.

d) De todas las rectas que pasan por el punto $P(2, -1, 1)$, calcula aquella que corta perpendicularmente a la recta r.

Solución:

a) $r : \begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -11 + 10\lambda \\ z = -8 + 7\lambda \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 10, 7) \\ P_r(0, -11, -8) \end{cases} \Longrightarrow$

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y + 11}{10} = \frac{z + 8}{7}$$

b) $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (1, 10, 7) \Longrightarrow \pi : x + 10y + 7z + m = 0$, como $P \in \pi \Longrightarrow 2 - 10 + 7 + m = 0 \Longrightarrow m = 1 \Longrightarrow \pi : x + 10y + 7z + 1 = 0$

c) Sustituyendo r en π:

$$\pi : (\lambda) + 10(-11 + 10\lambda) + 7(-8 + 7\lambda) + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{11}{10} \Longrightarrow Q\left(\frac{11}{10}, 0, -\frac{3}{10}\right)$$

d) La recta s está contenida en π y pasa por Q luego

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{11}{10}, 0, -\frac{3}{10}\right) - (2, -1, 1) = \left(-\frac{9}{10}, 1, -\frac{13}{10}\right) = -\frac{1}{10}(9, -10, 13) \\ P_s = P(2, -1, 1) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$s : \begin{cases} x = 2 + 9\lambda \\ y = -1 - 10\lambda \\ z = 1 + 13\lambda \end{cases}$$

Problema 0.12.2 Dadas la recta r y el plano π:

$$r : \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z + 2}{-1}, \quad \pi : 3x - my + z = 1$$

se pregunta si existe algún valor del parámetro m para el que

a) el plano y la recta son paralelos.

b) o bien, el plano contiene la recta.

c) o bien, el plano y la recta se cortan exactamente en un punto.

En cada caso, si existe, calcúlalo.
Solución:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,3,-1) \\ P_r(1,-1,-2) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$$

Sustituimos r en π:
$3(1+2\lambda) - m(-1+3\lambda) + (-2-\lambda) = 1 \Longrightarrow (3m-5)\lambda = m$

a) Si $m = \dfrac{5}{3} \Longrightarrow ¡0 = \dfrac{5}{3}! \Longrightarrow r$ y π son paralelos. $(r \parallel \pi)$

b) $\nexists m \in \mathbb{R}/0 = 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow r$ no está contenida en π para ningún valor de m.

c) Si $m \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{3}\right\} \Longrightarrow \lambda = \dfrac{m}{3m-5} \Longrightarrow$

$$A\left(1 + \frac{2m}{3m-5}, -1 + \frac{3m}{3m-5}, -2 - \frac{m}{3m-5}\right) = A\left(\frac{5(m-1)}{3m-5}, \frac{5}{3m-5}, \frac{10-7m}{3m-5}\right)$$

0.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.12.3 Dadas las rectas

$$(I) : \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases} \qquad (II) : \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases}$$

a) Calcula un punto posicional y un vector director de cada una.

b) Calcula la ecuación vectorial de cada una.

c) Calcula el rango de la matriz formada por los dos vectores directores y el vector diferencia, o vector resto, de los puntos posicionales obtenidos.

d) Del anterior rango, deduce la posición relativa de ambas rectas.

Solución:

a)

$$(I) : \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases} \Longrightarrow (I) : \begin{cases} x = 11 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 13 + 3\lambda \end{cases} \Longrightarrow (I) : \begin{cases} \overrightarrow{u_I} = (2,1,3) \\ P_I(11,0,13) \end{cases}$$

$$(II) : \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases} \Longrightarrow (II) : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = -5 + 2\lambda \end{cases} \Longrightarrow (II) : \begin{cases} \overrightarrow{u_{II}} = (1,-1,2) \\ P_{II}(0,-1,-5) \end{cases}$$

b) $(I) : (x,y,z) = (11,0,13) + \lambda(2,1,3)$
$(II) : (x,y,z) = (0,-1,-5) + \lambda(1,-1,2)$

c) $\overrightarrow{P_{II}P_I} = (11,0,13) - (0,-1,-5) = (11,1,18)$
$\begin{vmatrix} 11 & 1 & 18 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{P_{II}P_I} \\ \overrightarrow{u_I} \\ \overrightarrow{u_{II}} \end{pmatrix} = 2$ (las dos rectas están en el mismo plano)

d) Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_I} \\ \overrightarrow{u_{II}} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow r$ y s se cortan.

Problema 0.12.4 Dados los planos

$$(I): 3x - ay + 2z - (a-1) = 0; \quad (II): 2x - 5y + 3z - 1 = 0; \quad (III): x + 3y - (a-1)z = 0$$

a) Demuestra que, para cualquier valor del parámetro a, los tres planos no son paralelos.

b) Estudia su posición relativa, según los diferentes valores del parámetro a.

Solución:

a) (I) con $(II) \Longrightarrow \frac{3}{2} = \frac{-a}{-5} \neq \frac{2}{3} \Longrightarrow (I)$ y (II) no son paralelos.
(I) con $(III) \Longrightarrow \frac{3}{1} = \frac{-a}{3} = \frac{2}{-a+1}$ por la primera igualdad sería $a = -9$ pero en ese caso no se cumple la segunda igualdad, luego (I) y (III) no son paralelos.
(II) con $(III) \Longrightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{-5}{3} \Longrightarrow (II)$ y (III) no son paralelos.
En conclusión, los tres planos no pueden ser paralelos entre si.

b) Construimos el sistema de ecuaciones asociado

$$\begin{cases} 3x - ay + 2z = a - 1 \\ 2x - 5y + 3z = 1 \\ x + 3y - (a-1)z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -a & 2 & (a-1) \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -(a-1) & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$|A| = -2a^2 + 14a - 20 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 5 \end{cases}$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{2,5\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. Los tres planos se cortan en un punto.
- Si $a = 2$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 3F_2 - 2F_1 \\ 3F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & -5 & -1 \\ 0 & 11 & -5 & -1 \end{array}\right) =$ $\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado y los tres planos se cortan dos a dos. Los tres planos se cortan en una recta como un libro.
- Si $a = 5$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 3F_2 - 2F_1 \\ 3F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 14 & -14 & -4 \end{array}\right) =$ $\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - 14F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -90 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema incompatible, los tres planos no tienen puntos comunes y se cortan dos a dos formando en su interior un prisma triangular.

0.13. Islas Canarias

0.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.13.1 Dadas las rectas siguientes $r:\left\{\begin{array}{l} x+y-z=4\\ x+2y=7\end{array}\right.$ y $s:\left\{\begin{array}{l} x=2\\ y+5=0\end{array}\right.$

a) Estudie la posición relativa de r y s.

b) Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r, y que contiene el punto $A(11,-2,5)$

Solución:

a) $r:\left\{\begin{array}{l} x+y-z=4\\ x+2y=7\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=7-2\lambda\\ y=\lambda\\ z=3-\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-2,1,-1)\\ P_r(7,0,3)\end{array}\right.$

$s:\left\{\begin{array}{l} x=2\\ y+5=0\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=2\\ y=-5\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(0,0,1)\\ P_s(2,-5,0)\end{array}\right.$ y

$\overrightarrow{P_sP_r}=(7,0,3)-(2,-5,0)=(5,5,3)$

$\left[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{rrr} 5 & 5 & 3\\ -2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right| = 15\neq 9 \Longrightarrow r$ y s se cruzan. ($r \nparallel s$)

b) $\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}=(-2,1,-1)\Longrightarrow \pi: -2x+y-z+m=0$ como $P\in\pi \Longrightarrow -22-2-5+m=0\Longrightarrow m=29\Longrightarrow \pi:-2x+y+z+29=0$

Problema 0.13.2 Consideremos la recta $r:\left\{\begin{array}{l} 2x-y=5\\ 3x-4z=-1\end{array}\right.$ y el plano $\pi_1: x-y+3z=12$ que determinan la recta r.

a) Calcule la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π_1

b) Sabiendo que la recta r corta el plano π_1 averigüe el punto de intersección.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} 2x-y=5\\ 3x-4z=-1\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & -4\end{array}\right|=(4,8,3)\\ P_r(1,-3,1)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=1+4\lambda\\ y=-3+8\lambda\\ z=1+3\lambda\end{array}\right.$$

a)

$$\pi_2:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{\pi_1}}=(1,-1,3)\\ \overrightarrow{u_r}=(4,8,3)\\ P_r(1,-3,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc} x-1 & y+3 & z-1\\ 1 & -1 & 3\\ 4 & 8 & 3\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi: 9x-3y-4z-14=0$$

b) $(1+4\lambda)-(-3+8\lambda)+3(1+3\lambda)=12\Longrightarrow \lambda=1\Longrightarrow Q(5,5,4)$

0.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.13.3 Dada la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x=-2\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=2+\lambda\end{array}\right.$, y dado el plano $\pi: x-3y+5z=2$

a) ¿Cuál es la posición relativa de la recta r y el plano π?.

b) Calcular el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Solución:

a) $r:\left\{\begin{array}{l} x=-2\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=2+\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-2,1,1)\\ P_r(0,2,2)\end{array}\right.$

Sustituimos r en $\pi \Longrightarrow (-2\lambda)-3(2+\lambda)+5(2+\lambda)=2 \Longrightarrow ¡4=2! \Longrightarrow$ r y s son paralelas.

b)

$$\pi':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_\pi}=(1,-3,5)\\ \overrightarrow{u_r}=(-2,1,1)\\ P_r(0,2,2)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\left|\begin{array}{ccc} x & y-2 & z-2\\ 1 & -3 & 5\\ -2 & 1 & 1\end{array}\right|=0\Longrightarrow$$

$$\pi': 8x+11y+5z-32=0$$

Problema 0.13.4 Consideremos el punto $A(1,2,1)$ y la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x+y=5\\ 3y+z=14\end{array}\right.$

a) Encuentre la ecuación del plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta r.

b) Consideremos $P(1,4,2)$, un punto de la recta r. Y sea s la recta determinada por los puntos A y P. Calcule el ángulo que forman las rectas r y s.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+y=5\\ 3y+z=14\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=5-t\\ y=t\\ z=14-3t\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,-3)\\ P_r(5,0,14)\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(-1,1,-3)\Longrightarrow \pi: -x+y-3z+m=0$, como $A\in\pi \Longrightarrow -1+2-3+m=0 \Longrightarrow m=2 \Longrightarrow \pi: -x+y-3z+2=0 \Longrightarrow \pi: x-y+3z-2=0$

b) $s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{AP}=(1,4,2)-(1,2,1)=(0,2,1)\\ P_s=A(1,2,1)\end{array}\right.$

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}|\,|\overrightarrow{u_s}|}=\frac{|(-1,1,-3)\cdot(0,2,1)|}{\sqrt{11}\sqrt{5}}=\frac{|0+2-3|}{\sqrt{55}}=$$

$$\frac{\sqrt{55}}{55}=0,1348399724\Longrightarrow \alpha=82^\circ 15' 2''$$

0.14. La Rioja

0.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.14.1 Determinar en función del parámetro real a, la posición relativa de los siguientes planos:

$$\left\{\begin{array}{l}(a-1)x+y-z=a\\(a+1)x+(2a+1)y+z=-a\\ax+ay+z=-a\end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}a-1&1&-1&a\\a+1&2a+1&1&-a\\a&a&1&-a\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$|A|=2a^2-2=0\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=1\\a=-1\end{array}\right.$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{\pm 1\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. Los tres planos se cortan en un punto.
- Si $a=1$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-1&1\\2&3&1&-1\\1&1&1&-1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c}F_1\\F_2-2F_3\\F_3\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-1&1\\0&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c}F_1-F_2\\F_2\\F_3\end{array}\right]=$ $\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{array}\right)\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado y los tres planos se cortan dos a dos. Los tres planos se cortan en una recta como un libro.
- Si $a=-1$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&-1&-1\\0&-1&1&1\\-1&-1&1&1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c}F_1\\F_2\\2F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&-1&-1\\0&-1&1&1\\0&-3&3&3\end{array}\right)=$ $\left[\begin{array}{c}F_1\\F_2\\F_3-3F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&-1&-1\\0&-1&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado y los tres planos se cortan dos a dos. Los tres planos se cortan en una recta como un libro.

Problema 0.14.2 Dados los vectores $\overrightarrow{u}=(1,2,3)$ y $\overrightarrow{v}=(0,1,1)$

a) Hallar un vector $\overrightarrow{w}$ de módulo uno, que sea perpendicular a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

b) Calcular el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

Solución:

a) $\overrightarrow{w'}=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\1&2&3\\0&1&1\end{array}\right|=(-1,-1,1)$

$$\overrightarrow{w}=\frac{\overrightarrow{w'}}{\left|\overrightarrow{w'}\right|}=\frac{(-1,-1,1)}{\sqrt{3}}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

b) $S=|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=|(-1,-1,1)|=\sqrt{3}\ u^2$

0.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.14.3 Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x+3y-4z+9=0\\ -x-2y+z+1=0\end{array}\right.$ y es perpendicular al plano $\pi: x+3y+z+1=0$.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+3y-4z+9=0\\ -x-2y+z+1=0\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=21-5\lambda\\ y=-10+3\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-5,3,1)\\ P_r(21,-10,0)\end{array}\right.$$

$$\pi':\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi}=(1,3,1)\\ \overrightarrow{u_r}=(-5,3,1)\\ P_r(21,-10,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\left|\begin{array}{ccc} x-21 & y+10 & z\\ 1 & 3 & 1\\ -5 & 3 & 1\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi': y-3z+10=0$$

Problema 0.14.4 Dados las rectas r y s:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1\\ 4x+2y+2z=10\end{array}\right. \qquad s:\frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$$

y el plano $\pi: x+y-z+6=0$. Hallar la posición relativa entre

a) las rectas r y s.

b) el plano π y la recta s.

Solución:

a) $$r:\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1\\ 4x+2y+2z=10\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=4-2\lambda\\ y=-3+3\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-2,3,1)\\ P_r(4,-3,0)\end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,2,3)\\ P_s(-3,-2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=-3+\lambda\\ y=-2+2\lambda\\ z=1+3\lambda\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{P_sP_r}=(4,-3,0)-(-3,-2,1)=(7,-1,-1)$$

$$\left[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{ccc} 7 & -1 & -1\\ -2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{array}\right|=49\neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan } (r \not\parallel s)$$

b) Sustituimos s en $\pi \Longrightarrow (-3+\lambda)+(-2+2\lambda)-(1+3\lambda)+6=0 \Longrightarrow 0=0 \Longrightarrow s\subset\pi$. La recta s está contenida en el plano π.

0.15. Madrid

0.15.1. Modelo de 2020

Problema 0.15.1 Se consideran los puntos $A(3,1,2)$, $B(0,3,4)$ y $P(-1,1,0)$. Se pide:

a) Determinar las coordenadas de un punto Q sabiendo que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes, tienen sentidos opuestos y tienen el mismo módulo.

b) Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta r que contiene a A y P, y de la recta s que contiene a B y al punto $C(2,-1,-2)$.

c) Calcular el coseno del ángulo formado por $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (-3, 2, 2)$ y $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{AB} = (3, -2, -2)$. Tenemos $\overrightarrow{PQ} = Q - P \Longrightarrow Q = P + \overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 0) + (3, -2, -2) \Longrightarrow Q(2, -1, -2)$.

b) Tenemos:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AP} = (-4, 0, -2) = -2(2, 0, 1) \\ P_r = A(3, 1, 2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 \\ z = 2 + \lambda \end{array} \right.$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{BC} = (2, -4, -6) = 2(1, -2, -3) \\ P_s = B(0, 3, 4) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = 3 - 2\mu \\ z = 4 - 3\mu \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda = \mu \\ y = 1 = 3 - 2\mu \\ z = 2 + \lambda = 4 - 3\mu \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow H(1, 1, 1)$$

c) $\overrightarrow{PA} = (4, 0, 2) \Longrightarrow \left|\overrightarrow{PA}\right| = 2\sqrt{5}$, $\overrightarrow{PB} = (1, 2, 4) \Longrightarrow \left|\overrightarrow{PB}\right| = \sqrt{21}$ y $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 4 + 0 + 8 = 12$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{PA}\right| \left|\overrightarrow{PB}\right|} = \frac{12}{2\sqrt{5}\sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{105}} = \frac{2\sqrt{105}}{35}$$

$$\alpha = 54^\circ 9' 32''$$

Problema 0.15.2 Dadas las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{array} \right.$, $s : \left\{ \begin{array}{l} x = -3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$, se pide:

a) Hallar la distancia del origen a la recta s.

b) Determinar la posición relativa de r y s.

c) Escribir la ecuación del plano que contiene a la recta r y al vector perpendicular a r y a s.

d) Escribir la ecuación de una recta perpendicular común a r y a s.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2, -1, 1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{array} \right.$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x = -3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, -1, 1) \\ P_s(-3, 2, 1) \end{array} \right.$$

a) $\overrightarrow{OP_s} = (-3, 2, 1)$ y $\left|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{OP_s}\right| = \left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right| = |(-3, -5, 1)| = \sqrt{35}$

$$d(O, s) = \frac{\left|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{OP_s}\right|}{|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{210}}{6}$$

b) $\overrightarrow{P_rP_s} = (-4, 0, 1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan } r \not\parallel s.$$

c) $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 4, 4) = 4(0, 1, 1)$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (-2, -1, 1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$

d) Como intersección de dos planos. Uno de ellos sería el calculado en el apartado anterior y el otro sería:

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2, -1, 1) \\ P_s(-3, 2, 1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_2 : x + y - z + 2 = 0$$

$$t : \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

0.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.15.3 Dadas las rectas

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases} \quad \text{y } s : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases},$$

se pide:

a) Calcular la posición relativa de las rectas r y s.

b) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2, -1, 5)$.

c) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

Solución:

a) $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 3) \\ P_r(0, -2, 1) \end{cases}, s : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, -1, 1) \\ P_s(-1, -4, 0) \end{cases}$

y $\overrightarrow{P_rP_s} = (-1, -2, -1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) $\pi \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (1,1,3) \Longrightarrow x+y+3z+\lambda = 0$ como $P(2,-1,5) \in \pi \Longrightarrow 2-1+15+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -16 \Longrightarrow \pi : x+y+3z-16 = 0$.

c) $\pi' \parallel r$ y $s \subset \pi' \Longrightarrow \pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,3) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,-1,1) \\ P_s(-1,-4,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \left| \begin{array}{ccc} x+1 & y+4 & z \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$

$$\pi' : 4x + 5y - 3z + 24 = 0$$

Problema 0.15.4 Dados los puntos $P(-3,1,2)$ y $Q(-1,0,1)$ y el plano π de ecuación $x+2y-3z = 4$, se pide:

a) Hallar la proyección de Q sobre π.

b) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.

c) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

Solución:

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $Q \in t$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1,2,-3) \\ P_t = Q(-1,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto Q' proyección de Q sobre π en el punto de corte de t con π:

$$(-1+\lambda) + 2(2\lambda) - 3(1-3\lambda) = 4 \Longrightarrow \lambda = \frac{4}{7} \Longrightarrow Q'\left(-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{5}{7}\right)$$

b) Si $\pi' \parallel \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_{\pi'}} \Longrightarrow \pi' : x+2y-3z+\lambda = 0$ como $P(-3,1,2) \in \pi' \Longrightarrow -3+2-6+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 7 \Longrightarrow \pi' : x+2y-3z+7 = 0$

c) $\pi'' \perp \pi \Longrightarrow \pi'' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1,2,-3) \\ \overrightarrow{PQ} = (2,-1,-1) \\ P(-3,1,2) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi'' : \left| \begin{array}{ccc} x+3 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$

$$\pi'' : x + y + z = 0$$

0.15.3. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 (coincidente)

Problema 0.15.5 Se consideran los puntos $A(0,-4,2)$, $B(3,-2,3)$ y $C(-1,-3,3)$. Se pide:

a) Comprobar que el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo, identificando los catetos y la hipotenusa.

b) Determinar una ecuación del plano π que contiene a los tres puntos.

c) Calcular el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por los puntos B y C.

Solución:

a) Sean $\overrightarrow{AB}=(3,2,1)$ y $\overrightarrow{AC}=(-1,1,1)$. Tenemos que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+2+1=0\Longrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ luego los tres puntos determinan un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto se encuentra en el vértice A. Los catetos serán los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ y la hipotenusa el segmento $\overline{BC}$.

b) $\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(3,2,1)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,1,1)\\ A(0,-4,2)\end{array}\right.\Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x & y+4 & z-2\\ 3 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{array}\right|=0\Longrightarrow$

$$\pi: x-4y+5z-26=0$$

c) Sea $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{BC}=(-4,-1,0)=-(4,1,0)\\ P_r=B(3,-2,3)\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=3+4\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=3\end{array}\right.$

Seguimos los siguientes pasos:

- Calculamos un plano $\pi'\perp r/A\in\pi'\Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi'}}=\overrightarrow{u_r}$:

$$\pi': 4x+y+\lambda=0\Longrightarrow 0-4+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=4\Longrightarrow \pi': 4x+y+4=0$$

- Calculamos el punto A' de corte de r y π':

$$4(3+4\lambda)+(-2+\lambda)+4=0\Longrightarrow \lambda=-\frac{14}{17}\Longrightarrow A'\left(-\frac{5}{17},-\frac{48}{17},3\right)$$

- $\dfrac{A+A''}{2}=A'\Longrightarrow A''=2A'-A=2\left(-\frac{5}{17},-\frac{48}{17},3\right)-(0,-4,2)\Longrightarrow A''\left(-\frac{10}{17},-\frac{28}{17},4\right)$

Problema 0.15.6 Dadas la recta $r:\left\{\begin{array}{l}x-z=0\\ x+2y-z=4\end{array}\right.$ y la recta s que pasa por $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ y tiene dirección $(-1,1,0)$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de ambas rectas.

b) Calcular la ecuación de un plano que contiene a la recta r y a un vector perpendicular a r y a s.

c) Encontrar una perpendicular común a r y a s.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,0,1)\\ P_r(0,2,0)\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=2\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(-1,1,0)\\ \\ P_s=A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\end{array}\right.\Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}-\lambda\\ \\ y=\frac{1}{4}+\lambda\\ \\ z=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

a) Hacemos $\overrightarrow{P_rP_s} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) - (0,2,0) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$

$$[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{8}{4} = 2 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) Sea $\overrightarrow{u_t} \perp \overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s} \Longrightarrow \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_t} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,-1,1)$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,0,1) \\ P_r(0,2,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi := \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : -x + 2y + z - 4 = 0 \Longrightarrow \pi : x - 2y - z + 4 = 0$$

c) La recta perpendicular a r y s la calculamos como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,0,1) \\ P_r(0,2,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 = \pi : x - 2y - z + 4 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,1,0) \\ \\ P_s = A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x - 1/4 & y - 1/4 & z - 1/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \pi_2 : 2x + 2y + 4z - 3 = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - z + 4 = 0 \\ 2x + 2y + 4z - 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} - \lambda \\ \\ y = \frac{11}{6} - \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

0.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.15.7 Dados el punto $P(3,3,0)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$, se pide:

a) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.

b) Calcular el punto simétrico de P respecto de r.

c) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.

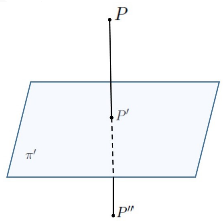
Solución:
Tenemos $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \\ P_r(2,0,-1) \end{array} \right.$

a) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{P_rP} = (1,3,1) \\ P(3,3,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x+y-4z-6=0$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

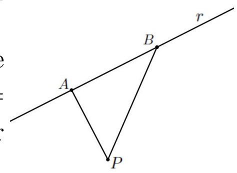
- Calculamos un plano $\pi' \perp r / P \in \pi'$:
  $\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \Longrightarrow \pi' : -x+y+\lambda = 0$
  $P \in \pi' \Longrightarrow -3+3+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi' : -x+y=0$

- Calculamos el punto P' de corte de π' con r. Para ello pasamos la ecuación de la recta r a paramétricas y sustituimos en el plano.
  $r : \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} \Longrightarrow -(2-\lambda)+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$. Y sustituyendo en r tenemos $P'(1,1,-1)$



- Ahora tenemos que P' es el punto medio entre P y su simétrico P'': $\dfrac{P+P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P'-P = (2,2,-2)-(3,3,0) \Longrightarrow P''(-1,-1,-2)$

c) Como A y B están en la recta r podemos poner de forma general $A(2-\lambda,\lambda,-1)$ y $B(2-\mu,\mu,-1)$ y el vector $\overrightarrow{AB} = (\lambda-\mu)(1,-1,0)$.
Tenemos que el vector $\overrightarrow{AP} = (3,3,0)-(2-\lambda,\lambda,-1) = (1+\lambda,3-\lambda,1)$
Como el ángulo recto se encuentra en el vértice A tenemos que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP} \Longrightarrow (1,-1,0)\cdot(1+\lambda,3-\lambda,1) = 0 \Longrightarrow 1+\lambda-3+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow A(1,1,-1)$, el vector $\overrightarrow{AP} = (2,2,1)$ y el vector $\overrightarrow{AB} = (1-\mu)(1,-1,0)$.



El área sería:

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}\right| = \frac{1}{2}|(1-\mu)\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(1-\mu)(1,1,-4)| = \frac{1}{2}|1-\mu|\sqrt{18} =$$
$$\frac{3\sqrt{2}}{2}|1-\mu| = \frac{3}{\sqrt{2}} \Longrightarrow |1-\mu| = 1.$$

- $1-\mu = 1 \Longrightarrow \mu = 0 \Longrightarrow B(2,0,-1)$ y $A(1,1,-1)$.
- $1-\mu = -1 \Longrightarrow \mu = 2 \Longrightarrow B(0,2,-1)$ y $A(1,1,-1)$.

Problema 0.15.8 Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1,0,-1)$, $B(2,1,0)$ y $C(4,3,-2)$. Se pide:

a) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.

b) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

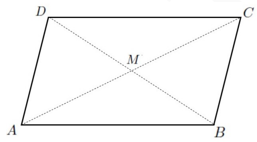
c) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución:

a) $M\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{AC} = (3, 3, -1)$ y $\overrightarrow{BC} = (2, 2, -2)$.

Tenemos: $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4(1, -1, 0)$



$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -1, 0) \\ P_r = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \lambda \\ y = \frac{3}{2} - \lambda \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

b) $D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = (1, 0, -1) + (2, 2, -2) = (3, 2, -3)$

Tenemos $\overrightarrow{AD} = (2, 2, -2)$ y $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}| = | - 4(1, -1, 0)| = 4\sqrt{2}\ u^2$$

c)

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|} = \frac{3 + 3 - 1}{\sqrt{19}\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{57}}{57} \Longrightarrow \alpha = 48^\circ 31' 38''$$

0.16. Murcia

0.16.1. Modelo de 2020

Problema 0.16.1 Los puntos $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ y $C(0, 0, 3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice D está contenido en la recta r que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos A, B y C.

a) Calcule la ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π.

c) Calcule las coordenadas del vértice D sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

Solución:

a) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-3, 3, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-3, 0, 3) \\ A(3, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x - 3 & y & z \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x + y + z - 3 = 0$

b) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi}(1, 1, 1) \\ P_r = P(1, 1, 1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

c) $D(1+\lambda, 1+\lambda, 1+\lambda) \Longrightarrow \overrightarrow{AD} = (-2+\lambda, 1+\lambda, 1+\lambda)$

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -2+\lambda & 1+\lambda & 1+\lambda \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|27\lambda| = 18 \Longrightarrow |\lambda| = 4 \Longrightarrow \lambda = \pm 4$$

Si $\lambda = 4 \Longrightarrow D(5,5,5)$.
Si $\lambda = -4 \Longrightarrow D(-3,-3,-3)$

Problema 0.16.2 Considere las siguientes rectas:

$$r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

a) Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

Solución:

Tenemos: $r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(5,6,-1) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = 5+\lambda \\ y = 6+\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$ y $s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,1,-1) \\ P_s(1,0,-1) \end{cases} \Longrightarrow s: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1-\lambda \end{cases}$

a) $\overrightarrow{P_sP_r} = (4,6,0)$

$$[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) Calculamos la recta t como intersección de dos planos:
Primero calculamos su vector director:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1,1,0)$$

$$\pi: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(5,6,-1) \end{cases} \Longrightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-5 & y-6 & z+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi: x+y-2z-13 = 0$$

$$\pi': \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,1,-1) \\ P_s(1,0,-1) \end{cases} \Longrightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi': x+y+2z+1 = 0$$

$$t: \begin{cases} x+y-2z-13 = 0 \\ x+y+2z+1 = 0 \end{cases}$$

0.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

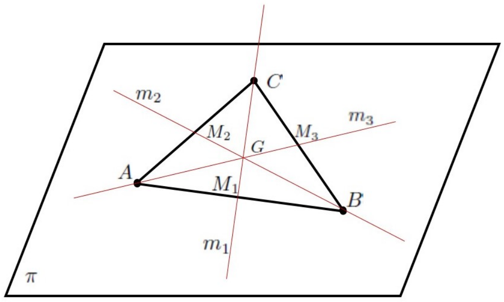
Problema 0.16.3 Se llama **mediana** de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

a) Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo de vértices $A(-1,2,3)$, $B(3,-4,1)$ y $C(1,-4,5)$.

b) Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Solución:

a) Calculamos las tres medianas:



- Sea M_1 punto medio del segmento $AB \Longrightarrow M_1 = \dfrac{A+B}{2} = (1,-1,2)$, la recta m_1 :
$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{CM_1} = (1,-1,2)-(1,-4,5) = (0,3,-3) = 3(0,1,-1) \\ C(1,-4,5) \end{array}\right. \Longrightarrow m_1 : \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -4+\lambda \\ z = 5-\lambda \end{array}\right.$$

- Sea M_2 punto medio del segmento $AC \Longrightarrow M_2 = \dfrac{A+C}{2} = (0,-1,4)$, la recta m_2 :
$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{BM_2} = (0,-1,4)-(3,-4,1) = (-3,3,3) = 3(-1,1,1) \\ B(3,-4,1) \end{array}\right. \Longrightarrow m_2 : \left\{\begin{array}{l} x = 3-\mu \\ y = -4+\mu \\ z = 1+\mu \end{array}\right.$$

- Sea M_3 punto medio del segmento $CB \Longrightarrow M_3 = \dfrac{C+B}{2} = (2,-4,3)$, la recta m_3 :
$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AM_3} = (2,-4,3)-(-1,2,3) = (3,-6,0) = 3(1,-2,0) \\ A(-1,2,3) \end{array}\right. \Longrightarrow m_3 : \left\{\begin{array}{l} x = -1+\beta \\ y = 2-2\beta \\ z = 3 \end{array}\right.$$

b) Calculamos el punto de corte de dos de estas rectas, por ejemplo m_1 con m_2:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = 3-\mu \\ -4+\lambda = -4+\mu \\ 5-\lambda = 1+\mu \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \mu = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow G(1,-2,3)$$

Sólo falta comprobar que este punto pertenece a m_3:
$$\left\{\begin{array}{l} 1 = -1+\beta \Longrightarrow \beta = 2 \\ -2 = 2-2\beta \Longrightarrow \beta = 2 \\ 3 = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow G \in m_3$$
Como el punto $G(1,-2,3)$ pertenece a las tres rectas, y no hay coincidencias, es el punto de corte de las tres (se trata del baricentro)

Problema 0.16.4 Considere la recta r y el plano π dados por las siguientes ecuaciones:

$$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0}, \quad \pi : x - 2y - z = 4$$

a) Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

b) En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso contrario, calcule la distancia entre la recta y el plano.

c) Determine el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Solución:

Tenemos: $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,0) \\ P_r(-1,2,1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 \end{array} \right.$ y $\overrightarrow{u_\pi} = (1,-2,-1)$

a) Sustituimos r en $\pi \Longrightarrow (-1+2\lambda) - 2(2+\lambda) - 1 = 4 \Longrightarrow ¡-6 = 4! \Longrightarrow r$ y π son paralelos. $(r \parallel \pi)$

b) $d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \dfrac{|-1-4-1-4|}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{10}{\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}\ u$

c) $\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1,-2,-1) \\ \overrightarrow{u_r} = (2,1,0) \\ P_r(-1,2,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi' : x - 2y + 5z = 0$

0.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.16.5 Considere los puntos $P(5,6,1)$ y $Q(-3,-2,5)$, y la recta $r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4}$.

a) Determine el punto R de la recta r para el cual el área del triángulo PQR es $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.
Observación: hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.

b) Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q y compruebe que dicha recta corta perpendicularmente a la recta r.

Solución:

Tenemos: $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,4) \\ P_r(0,1,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{array} \right.$

a) El punto $R(\lambda, 1+\lambda, 4+4\lambda)$ es un punto de r. Calculamos los vectores $\overrightarrow{PQ} = (-3,-2,5) - (5,6,1) = (-8,-8,4)$ y $\overrightarrow{PR} = (\lambda, 1+\lambda, -1+4\lambda) - (5,6,1) = (\lambda-5, -5+\lambda, -2+4\lambda)$

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \lambda-5 & -5+\lambda & -2+4\lambda \\ -8 & -8 & 4 \end{vmatrix} | = \frac{1}{2}|36(\lambda-1)(1,1,0)| =$$

$$18|\lambda-1|\sqrt{2} = 18\sqrt{2} \Longrightarrow |\lambda-1| = 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda-1 = 1 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow R_1(2,3,7) \\ \lambda-1 = -1 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow R_2(0,1,-1) \end{array} \right.$$

b) $s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{PQ}=-4(2,2,-1)\\ P_s=P(5,6,1)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=5+2\mu\\ y=6+2\mu\\ z=1-\mu\end{array}\right.$

Comprobamos que r y s se cortan calculando ese punto

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda=5+2\mu\\ 1+\lambda=6+2\mu\\ -1+4\lambda=1-\mu\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda=1\\ \mu=-2\end{array}\right. \Longrightarrow H(1,2,3)$$

Ahora comprobamos que son perpendiculares

$$\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}=(1,1,4)\cdot(2,2,-1)=2+2-4=0\Longrightarrow \overrightarrow{u_r}\perp\overrightarrow{u_s}\Longrightarrow r\perp s$$

Problema 0.16.6 Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r:\left\{\begin{array}{l}5x+3y=19\\ y-5z=3\end{array}\right. \qquad s:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{0}$$

a) Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

Solución:

a) $r:\left\{\begin{array}{l}5x+3y=19\\ y-5z=3\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=2-3\lambda\\ y=3+5\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-3,5,1)\\ P_r(2,3,0)\end{array}\right.$

$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(-1,1,0)\\ P_s(1,0,5)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=5\end{array}\right.$ y $\overrightarrow{P_sP_r}=(2,3,0)-(1,0,5)=(1,3,-5)$

b) $\left[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{ccc}1&3&-5\\ -3&5&1\\ -1&1&0\end{array}\right|=-14\neq 0\Longrightarrow r$ y s se cruzan. $(r\nparallel s)$

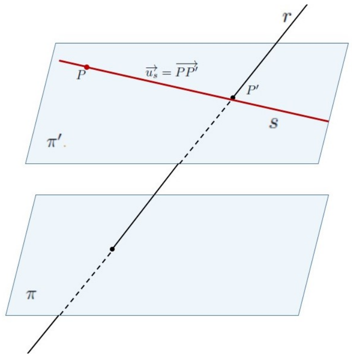
$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-3,5,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(-1,1,0)\\ P_r(2,3,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x-2&y-3&z\\ -3&5&1\\ -1&1&0\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi:x+y-2z-5=0$

0.17. Navarra

0.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.17.1 Calcula la ecuación continua de una recta r sabiendo que corta a la recta $r:\left\{\begin{array}{l}3x+y-z-7=0\\ x+y-5=0\end{array}\right.$, es paralela al plano de ecuación $\pi:2x-y+3z-6=0$ y pasa por el punto $P(-1,3,1)$.

Solución:
Seguimos el siguiente procedimiento:



- Calculamos un plano $\pi' \parallel \pi / P \in \pi'$:

$$\pi' : 2x - y + 3z + m = 0 \Longrightarrow -2 - 3 + 3 + m = 0 \Longrightarrow m = 2 \Longrightarrow \pi' : 2x - y + 3z + 2 = 0$$

- Calculamos el punto de corte P' de π' con r. Para ello pasamos r a su ecuación paramétrica y sustituimos en π':

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - z - 7 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = (1, -1, 2) \\ P_r(0, 5, -2) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow 2(\lambda) - (5 - \lambda) + 3(-2 + 2\lambda) + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P'(1, 4, 0)$$

- La recta buscada s es la que pasa por P y P':

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{P'P} = (-1, 3, 1) - (1, 4, 0) = (-2, -1, 1) \\ P_s = P(-1, 3, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 - 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$s : \frac{x + 1}{-2} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z - 1}{1}$$

Problema 0.17.2 Los puntos $A(-1, 2, 1)$ y $B(2, 5, 1)$ son dos vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que están en la recta de ecuación

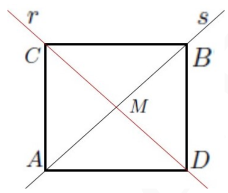
$$r : \frac{x}{-1} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z + 1}{-4}$$

Solución:

El enunciado presenta dos posibles posiciones para los dos vértices. Pueden pertenecer a una de las diagonales del cuadrado o bien ser consecutivos:

- Si A y B son vértices consecutivos tendremos $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{u_r}$ lo que evidentemente no se cumple, ya que $\overrightarrow{AB} = (3, 3, 0) \neq k(-1, 1, -4)$.
- Si A y B son vértices de una de las diagonales si es posible que los otros vértices se encuentre en la recta r.

$$r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,-4)\\ P_r(0,4,-1)\end{cases}\Longrightarrow r:\begin{cases}x=-\lambda\\ y=4+\lambda\\ z=-1-4\lambda\end{cases}\quad \text{y}$$



$$s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{AB}=3(1,1,0)\\ P_s=A(-1,2,1)\end{cases}\Longrightarrow s:\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=1\end{cases}$$

Estas dos rectas se tienen que cortar en el punto medio M entre A y $B\Longrightarrow M=\dfrac{A+B}{2}\Longrightarrow$ $M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2},1\right)$, lo comprobamos.

$$\begin{cases}\frac{1}{2}=-\lambda\Longrightarrow\lambda=-\frac{1}{2}\\ \frac{7}{2}=4+\lambda\Longrightarrow\lambda=-\frac{1}{2}\\ 1=-1-4\lambda\Longrightarrow\lambda=-\frac{1}{2}\end{cases}\Longrightarrow M\in r$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}=-1+\lambda\Longrightarrow\lambda=\frac{3}{2}\\ \frac{7}{2}=2+\lambda\Longrightarrow\lambda=\frac{3}{2}\\ 1=1\Longrightarrow\forall\lambda\in\mathbb{R}\end{cases}\Longrightarrow M\in s$$

Tenemos que $M\in r$, $M\in s$ y Rango$\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{pmatrix}$=Rango$\begin{pmatrix}-1&1&-4\\ 1&1&0\end{pmatrix}=2\Longrightarrow r$ y s se cortan en el punto M.

$$d(A,M)=\left|\overrightarrow{AM}\right|=\left|\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2},1\right)-(-1,2,1)\right|=\left|\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)\right|=\frac{3}{2}|(1,1,0)|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Un punto de r es $P(-\lambda,4+\lambda,-1-4\lambda)$ y buscamos dos de ellos que están a una distancia $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ del punto M:

$$d(M,P)=\left|\overrightarrow{MP}\right|=\left|(-\lambda,4+\lambda,-1-4\lambda)-\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2},1\right)\right|=\left|\left(-\lambda-\frac{1}{2},4-\frac{7}{2}+\lambda,-2-4\lambda\right)\right|=$$

$$\sqrt{\left(-\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)^2+(-2-4\lambda)^2}=\sqrt{\frac{9(2\lambda+1)^2}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow\frac{9(2\lambda+1)^2}{2}=\frac{18}{4}$$

$$\Longrightarrow(2\lambda+1)^2=1\Longrightarrow4\lambda(\lambda+1)=0\Longrightarrow\lambda=0,\quad\lambda=-1$$

Si $\lambda=-1\Longrightarrow P_1(1,3,3)\Longrightarrow C(1,3,3)$
Si $\lambda=0\Longrightarrow P_1(0,4,-1)\Longrightarrow D(0,4,-1)$

Otra forma podría haber sido construyendo una esfera de centro M y radio $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Los puntos buscados están en la intersección de la recta r con la esfera.

0.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.17.3 El plano π pasa por los puntos $P_1(2,0,5)$, $P_2(1,-2,2)$ y $P_3(3,-1,2)$. Una esfera con centro en $C(0,1,-3)$ toca al plano en un único punto. Calcula el radio de la esfera y el punto de intersección.

Solución:

$$\pi:\begin{cases}\overrightarrow{P_1P_2}=(1,-2,2)-(2,0,5)=(-1,-2,-3)\\ \overrightarrow{P_1P_3}=(3,-1,2)-(2,0,5)=(1,-1,-3)\\ P_1(2,0,5)\end{cases}\Longrightarrow\pi:\begin{vmatrix}x-2&y&z-5\\ -1&-2&-3\\ 1&-1&-3\end{vmatrix}=0\Longrightarrow\pi:$$

$x-2y+z-7=0$
Sea r la recta perpendicular a π que pase por el centro C de la esfera
$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}=(1,-2,1)\\ P_r=C(0,1,-3)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=1-2\lambda\\ z=-3+\lambda\end{array}\right.$. El punto de corte de esta recta con el plano π es el punto de tangencia de la esfera con el plano

$$\lambda-2(1-2\lambda)+(-3+\lambda)-7=0\Longrightarrow\lambda=2\Longrightarrow P(2,-3,-1)$$

El radio es la distancia de C a P o, lo que es lo mismo, la distancia de C a π

$$d(C,\pi)=\frac{|0-2-3-7|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{12}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}\ u$$

Problema 0.17.4 Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que corta perpendicularmente a las siguientes rectas: $r:\left\{\begin{array}{l}x+2y+z-1=0\\ x+3z-7=0\end{array}\right.$ y $s:\frac{x+2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{0}$

Solución:

Tenemos: $r:\left\{\begin{array}{l}x+2y+z-1=0\\ x+3z-7=0\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 1&2&1\\ 1&0&3\end{vmatrix}=2(3,-1,-1)\\ P_r(4,-2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow r:$
$\left\{\begin{array}{l}x=4+3\lambda\\ y=-2-\lambda\\ z=1-\lambda\end{array}\right.$

$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,1,0)\\ P_s(-2,0,-3)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=-2+2\lambda\\ y=\lambda\\ z=-3\end{array}\right.$ y sea $\overrightarrow{P_sP_r}=(4,-2,1)-(-2,0,-3)=(6,-2,4)$

Analizamos su posición relativa $\left[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\begin{vmatrix}6&-2&4\\ 3&-1&-1\\ 2&1&0\end{vmatrix}=30\neq0\Longrightarrow r$ y s se cruzan.

Calculamos el vector perpendicular a r y $s\Longrightarrow\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 3&-1&-1\\ 2&1&0\end{vmatrix}=(1,-2,5)$

Calculamos la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(1,-2,5)\\ \overrightarrow{u_r}=(3,-1,-1)\\ P_r(4,-2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow\pi_1:\begin{vmatrix}x-4&y+2&z-1\\ 1&-2&5\\ 3&-1&-1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow\pi_1:7x+16y+5z-1=0$$

$$\pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(1,-2,5)\\ \overrightarrow{u_s}=(2,1,0)\\ P_s(-2,0,-3)\end{array}\right. \Longrightarrow\pi_2:\begin{vmatrix}x+2&y&z+3\\ 1&-2&5\\ 2&1&0\end{vmatrix}=0\Longrightarrow\pi_2:-x+2y+z+1=0$$

$$t:\left\{\begin{array}{l}7x+16y+5z-1=0\\ -x+2y+z+1=0\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=1-2\lambda\\ z=-3+5\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(1,-2,5)\\ P_t(0,1,-3)\end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$t:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{5}$$

0.18. País Vasco

0.18.1. Modelo de 2020

Problema 0.18.1 Sean la recta
$r : \left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{array} \right.$ y el plano $\pi : x - y + Az = 0$

a) ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a r?

b) Encontrar el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $(0, 0, 0)$.

Solución:

a) $\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{array} \right| = (5, 8, 1)$, $\overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, A)$ y $\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 0 \Longrightarrow$
$5 - 8 + A = 0 \Longrightarrow A = 3$

b) $\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (5, 8, 1) \Longrightarrow \pi' : 5x + 8y + z + \lambda = 0$ como $O(0, 0, 0) \in \pi' \Longrightarrow 0 + 0 + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi' : 5x + 8y + z = 0$

Problema 0.18.2 Se consideran los tres puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$ y $C(-1, -1, 2)$. ¿Están alineados?
En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta que los contiene.
En caso negativo calcular el plano que los contiene.
Solución:
$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{AC}(-1, -1, 1)$
$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Longrightarrow (1, 1, 0) = (-k, -k, k) \Longrightarrow k = 0$ y $k = -1$ lo cual es imposible y, por tanto no estan alineados.
$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{array} \right| = 0$ y $\left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = -1 \Longrightarrow \text{Rango}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2 \Longrightarrow$ Los puntos no están alineados.

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, -1, 1) \\ A(0, 0, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x & y & z - 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : x - y = 0$$

0.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.18.3 Se pide:

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-1, 2, 3)$ y es paralelo a los vectores $\overrightarrow{v} = (-1, -2, -3)$ y $\overrightarrow{w} = (1, 3, 5)$

b) Hallar el valor de A para que el plano calculado en el apartado anterior y $Ax - y + 5z = 8$ sean perpendiculares.

Solución:

a)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{v} = (-1, -2, -3) \\ \overrightarrow{w} = (1, 3, 5) \\ A(-1, 2, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x + 1 & y - 2 & z - 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : -x + 2y - z - 2 = 0$$

b) $\overrightarrow{u_\pi} \perp \overrightarrow{u_{\pi'}} \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_{\pi'}} = (-1,2,-1)\cdot(A,-1,5) = -A-2-5 = 0 \Longrightarrow A = -7$

Problema 0.18.4 Sea π el plano $2x-y+Az=0$. Sea r la recta dada por $\left\{\begin{array}{l} 4x-3y+4z=-1 \\ 3x-2y+z=-3 \end{array}\right.$ Hallar A para que r y π sean paralelos. Además, obtener el plano perpendicular a r y que pase por el origen.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} 4x-3y+4z=-1 \\ 3x-2y+z=-3 \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (5,8,1) \\ P_r(-7,-9,0) \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-7+5\lambda \\ y=-9+8\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

$r \parallel \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = (5,8,1)\cdot(2,-1,A) = 10-8+A = 0 \Longrightarrow A=-2$
Un plano $\pi' \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (5,8,1) \Longrightarrow \pi' : 5x+8y+z+m=0$ como $O(0,0,0) \in \pi' \Longrightarrow 0+0+0+m=0 \Longrightarrow m=0 \Longrightarrow \pi' : 5x+8y+z=0$

0.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.18.5 Dada la recta $r:\left\{\begin{array}{l} 3x+y-z=2 \\ 2x+y+4z=1 \end{array}\right.$, y el plano $\pi : 3x+(\alpha+1)(y+1)+\alpha z=1$,

a) hallar α para que la recta y el plano sean paralelos,

b) determinar si el punto $P(1,1,2)$ pertenece al plano hallado en a).

Solución:

a) $$r:\left\{\begin{array}{l} 3x+y-z=2 \\ 2x+y+4z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (5,-14,1) \\ P_r(1,-1,0) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+5\lambda \\ y=-1-14\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \text{ y } \pi : 3x+(\alpha+1)y+\alpha z+\alpha=0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (3,\alpha+1,\alpha)$$

$$r \parallel \pi \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 0 \Longrightarrow 15-14(\alpha+1)+\alpha=0 \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{13}.$$

b) $\pi : 3x + \left(\frac{1}{13}+1\right)y + \frac{1}{13}z + \frac{1}{13} = 0 \Longrightarrow \pi : 39x+14y+z+1=0$. Comprobamos si el punto $P \in \pi \Longrightarrow 39+14+2+1 = 56 \neq 0 \Longrightarrow P \notin \pi$

Problema 0.18.6 Hallar el punto Q, simétrico de $P(1,2,3)$ respecto al plano de ecuación $x+y+z=0$, explicando los pasos seguidos para su cálculo.

Solución:
Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $r \perp \pi / P \in r \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,1)$

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(1,2,3) \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3+\lambda \end{array}\right.$$

- Calculamos el punto M de corte de r con π

$$(1+\lambda)+(2+\lambda)+(3+\lambda)=0 \Longrightarrow \lambda=-2 \Longrightarrow M(-1,0,1)$$

- M es el punto medio entre P y Q

$$\frac{P+Q}{2}=M \Longrightarrow Q=2M-P=(-2,0,2)-(1,2,3)=(-3,-2,-1) \Longrightarrow Q(-3,-2,-1)$$