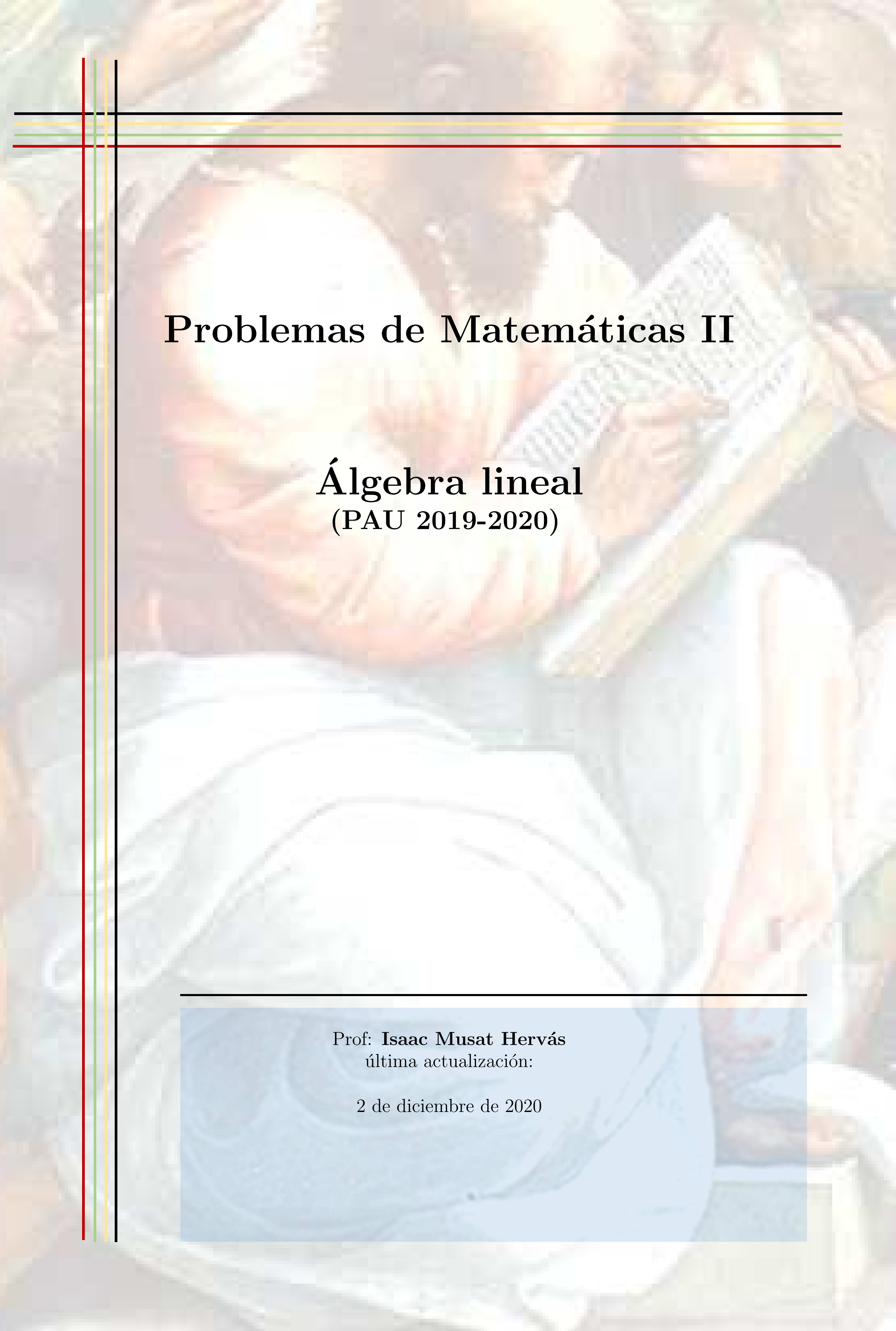

Problemas de Matemáticas II

Álgebra lineal

(PAU 2019-2020)

Prof: **Isaac Musat Hervás**

última actualización:

2 de diciembre de 2020

Índice general

0.1. Resúmenes teóricos . . . 5
0.2. Andalucia . . . 8
0.2.1. Modelo de 2020 . . . 8
0.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 9
0.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 10
0.3. Aragón . . . 11
0.3.1. Modelo de 2020 . . . 11
0.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 13
0.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019 . . . 14
0.4. Asturias . . . 15
0.4.1. Modelo de 2020 . . . 15
0.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 16
0.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 17
0.5. Cantabria . . . 19
0.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 19
0.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 20
0.6. Castilla La Mancha . . . 21
0.6.1. Modelo de 2020 . . . 21
0.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 22
0.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 23
0.7. Castilla León . . . 25
0.7.1. Modelo de 2020 . . . 25
0.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 26
0.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 27
0.8. Cataluña . . . 28
0.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 28
0.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 29
0.9. Comunidad Valenciana . . . 30
0.9.1. Modelo de 2020 . . . 30
0.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 31
0.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 33
0.10. Extremadura . . . 35
0.10.1. Modelo de 2020 . . . 35
0.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 36
0.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 37
0.11. Galicia . . . 38
0.11.1. Modelo de 2020 . . . 38
0.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 . . . 39
0.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 . . . 40

0.12. Islas Baleares 41
0.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019 41
0.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019 43
0.13. Islas Canarias 44
0.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 44
0.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 45
0.14. La Rioja 46
0.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 46
0.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 48
0.15. Madrid 50
0.15.1. Modelo de 2020 50
0.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 52
0.15.3. Convocatoria Ordinaria junio (coincidente) de 2020 53
0.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 54
0.16. Murcia 56
0.16.1. Modelo de 2020 56
0.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 57
0.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 58
0.17. Navarra 60
0.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 60
0.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019 61
0.18. País Vasco 63
0.18.1. Modelo de 2020 63
0.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 64
0.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020 65

Teoría

0.1. Resúmenes teóricos

Matrices

matriz A	dimensión	Transpuesta A^T	dimensión
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$	$n \times m$
matriz cuadrada	orden	identidad	matriz triangular
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	n	$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- **Suma:** Tienen que tener la misma dimensión y se suman término a término.
- **Producto de una matriz por un número real:** Se multiplican todos los términos de la matriz por ese número.
- **Producto de dos matrices:** Se desarrolla multiplicando matriz fila por matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

  El número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

Determinante de una matriz

- La matriz tiene que ser cuadrada
  a) De orden dos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
  b) De orden tres: (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

- Propiedades:
  a) $\begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$
  b) $|A^T| = |A|$

c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

d) Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

e) Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.

f) Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.

g) Si dos filas o dos columnas son proporcionales el determinante vale cero.

h) Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

Matriz Adjunta:

- Adjunto del elemento a_{ij} de una matriz es el valor del determinante resultante de eliminar la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$ y se le denomina A_{ij}.

- Matriz adjunta. $Adj(A) = (A_{ij})$

Cálculo del determinate de una matriz por adjuntos:
Se elige una fila o una columna (cualquiera es válida, siempre será mejor aquella que tenga más ceros), escojo la primera fila para el ejemplo:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

Una matriz tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.
A las matrices que tienen inversa se la llama **Regulares** y a las que no la tienen se las llama **Singulares**.
Rango de una matriz
Es el número de filas linealmente independientes.
De forma práctica se calcula por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión 3×4 cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3, si el determinate de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado, si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden 2. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango será 2, si por el contrario todos son cero tendremos que buscar menores de orden 1, y en el momento que encontremos alguno distinto de cero el rango será 1.

Sistema de Ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \quad = & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{cases}$$

Matriz del sistema: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Matriz de variables: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$,

Matriz de términos independientes: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Se trata de una ecuación matricial: $AX = B$.
Si $|A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ y en este caso el sistema se podrá resolver de la siguiente manera $X = A^{-1}B$

Antes de resolver un sistema estudiar si hay ecuaciones nulas, iguales o proporcionales, para el estudio del rango.

Teorema de Rouché

- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) = nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD). Y tiene solución única.
- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) < nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI). Y tiene infinitas soluciones.
- Si Rango($\overline{A}$) ≠Rango(A) se trata de un Sistema Incompatible. Y no tiene solución.

Sistema homogéneos Son aquellos en los que $b_i = 0$, estos siempre tienen solución $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial, pero en el caso de que de que Rango(A) $< m$ (nº de incógnitas) estaríamos ante infinitas soluciones, es decir:

- Si Rango(A) $= m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCD $\Longrightarrow$ $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial.
- Si Rango(A) $< m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCI $\Longrightarrow$ infinitas soluciones.

Regla de Cramer
Sea $\overline{A} = (C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, B)$, entoces sustituimos la columna B en la matriz $\overline{A}$ por cada una de las columnas y tendremos:

$$x_1 = \frac{|B, C_2, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \;\; x_2 = \frac{|C_1, B, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|C_1, C_2, \cdots, B|}{|A|}$$

Problemas

0.2. Andalucia

0.2.1. Modelo de 2020

Problema 0.2.1 Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a + d = 1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -c = b \\ -d = -a \\ a = d \\ b = -c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = d \\ b = -c \\ a + d = 1 \\ ad - cb = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = d = \frac{1}{2} \\ b = -c \\ \frac{1}{4} + b = 2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = d = \frac{1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ c = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ o } \begin{cases} a = d = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ c = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ o } X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Problema 0.2.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y

$B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$

considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^tA = B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m.

Solución:

$$X^tA = B^t \Longrightarrow (x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2m^2-1\ \ m\ \ 1) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} (2-m)x + y + mz = 2m^2 - 1 \\ x + my + z = m \\ (2m-1)x + y + z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2-m & 1 & m & 2m^2-1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 2m-1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$|A| = -2(m^3 - 3m + 2) = 0 \Longrightarrow m = -2\ \ m = 1$$

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $m = -2$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 = F_2 \\ F_2 = F_1 \\ 2F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 7 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) =$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-4F_1 \\ F_3+5F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & -6 & 15 \\ 0 & -9 & 6 & -9 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow$$
Sistema incompatible.

- Si $m=1$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Tenemos $F_1 = F_2 = F_3 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 1 <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

0.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.2.3 Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de A según los valores de m.

b) Para $m = 2$, calcula la inversa de $2020A$.

Solución:

a) $|A| = -(2m^2+3m-5) = 0 \Longrightarrow m = 1$ y $m = -\dfrac{5}{2}$.

- Si $m \in \mathbb{R} - \left\{1, -\dfrac{5}{2}\right\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
- Si $m = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.
- Si $m = -\dfrac{5}{2} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ -5/2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ $\text{Rango}(A) = 2$.

b) Si $m = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = -\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Luego $(2020A)^{-1} = -\dfrac{1}{2020\cdot 9}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{18180}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 0.2.4 Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Discute el sistema dado por $AX = B$, según los valores de a.

b) Para $a = 0$, resuelve el sistema dado por $AX = B$. Calcula, si es posible, una solución en la que $y + z = 4$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a\\ 1 & 0 & 1 & 2a\\ 4 & 1 & 4 & 3a \end{array}\right)$, con $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=2$.

$|A_2|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a\\ 1 & 0 & 2a\\ 4 & 1 & 3a \end{vmatrix}=4a=0\Longrightarrow a=0\Longrightarrow$

- Si $a=0$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0\Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=2$ y en este caso Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})<$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
- Si $a\neq 0\Longrightarrow |A_2|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=3\Longrightarrow$ Rango$(A)\neq$Rango$(\overline{A})\Longrightarrow$ Sistema incompatible.

b) Para que el sistema tenga solución tiene que ser $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0\\ x+z=0\\ 4x+y+4z=0 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-\lambda\\ y=0\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

$$y+z=4\Longrightarrow 0+\lambda=4\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-4\\ y=0\\ z=4 \end{array}\right.$$

.

0.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.2.5 Considera el sistema de ecuaciones dado por $AX=B$ siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1\\ m & 4 & -2\\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2\\ 2m\\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Discute el sistema según los valores de m.

b) Para $m=-2$, ¿existe alguna solución con $z=0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2\\ m & 4 & -2 & 2m\\ 0 & m+2 & -3 & 1 \end{array}\right)$, $|A|=m^2-2m-8=0\Longrightarrow m=-2$ y $m=4$.

- Si $m\neq -2$ y $m\neq 4\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$ Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m=4$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2\\ 4 & 4 & -2 & 8\\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-4F_1\\ F_3 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 12 & -6 & 0\\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 2F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $m=-2$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 2\\ -2 & 4 & -2 & -4\\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+2F_1\\ F_3 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$
$\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) Si $m=-2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y+z=2\\ -3z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7/3+2\lambda\\ y=\lambda\\ z=-1/3 \end{array}\right.$$

Luego no existe ninguna solución con $z=0$

Problema 0.2.6 Considera $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}$,

a) Halla los valores de λ tales que $|A-\lambda I|=0$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) Para $\lambda=1$, resuelve el sistema dado por $(A-\lambda I)X=0$. Existe alguna solución tal que $z=1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Solución:

a) $|A-\lambda I|=\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3\\ 0 & -\lambda & 2\\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=$
$(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=0\Longrightarrow \lambda=2$ y $\lambda=\pm 1$.

b) Si $\lambda=1\Longrightarrow (A-I)X=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow$
$\left\{\begin{array}{l} 2y+3z=0\\ -y+2z=0\\ y=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=t\\ y=0\\ z=0 \end{array}\right.$ Luego no hay ninguna solución con $z=1$.

0.3. Aragón

0.3.1. Modelo de 2020

Problema 0.3.1 Considere las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Encuentre la matriz X que resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$AX-X=B$$

Solución:
$AX-X=B\Longrightarrow (A-I)X=B\Longrightarrow X=(A-I)^{-1}B=$
$\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0\\ 1 & -4 & -1\\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 0.3.2 Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Estudie si existe la matriz inversa de B.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|B| = 0 \Longrightarrow \nexists B^{-1}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

Problema 0.3.3 Sea k un parámetro real y considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$$

Determine los valores del parámetro real k, para lo que ese sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Solución:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{array}\right)$, $|A| = -(k^2 + k - 6) = 0 \Longrightarrow k = -3$ y $k = 2$.

- Si $k \neq -3$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $k = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 4F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $k = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

0.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.3.4 Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+my+z=-1 \end{array}\right.$$

Discuta el sistema segun los valores de $m \in \mathbb{R}$.

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 1 & m-1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 & -1 \end{array}\right),\ |A|=4-m^2=0 \Longrightarrow m=\pm 2.$$

- Si $m \in \mathbb{R}-\{0,\pm 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $m=-2$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{array}\right)=$
$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema incompatible

- Si $m=2$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right)=$
$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-5F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Problema 0.3.5 Dadas las matrices $A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{rrr} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ y $C=\left(\begin{array}{rr} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)$

a) Calcule, si es posible, $(A\cdot B^t)^{-1}$.

b) Compruebe que, $C^3=I$, donde es la matriz identidad, y calcule C^{16}.

Solución:

a) $A\cdot B^t=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{rr} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rr} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow (A\cdot B^t)^{-1}=\left(\begin{array}{rr} 0 & 1 \\ 1/4 & -3/4 \end{array}\right)$

b) $C^3=\left(\begin{array}{rr} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rr} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$

$C^{16}=\left(C^3)\right)^5\cdot C=I^5\cdot C=C=\left(\begin{array}{rr} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)$

Problema 0.3.6 Resuelva el sistema matricial

$$\left\{\begin{array}{l} X-2Y=\left(\begin{array}{rrr} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \\ \\ 2X+3Y=\left(\begin{array}{rrr} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{array}\right) \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} X-2Y=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}\\ \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1\\ 14 & 3 & 7\end{pmatrix}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2X+4Y=\begin{pmatrix} 0 & -6 & -6\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}\\ \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1\\ 14 & 3 & 7\end{pmatrix}\end{array}\right. \text{sumando} \Longrightarrow$$

$$7Y=\begin{pmatrix} 0 & -6 & -6\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1\\ 14 & 3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -7\\ 14 & 7 & 7\end{pmatrix}\Longrightarrow Y=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 & -7\\ 14 & 7 & 7\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=2Y+\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

0.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 0.3.7 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4\\ 1 & 0 & -2\\ -1 & a & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ a\end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera.

a) Discuta el sistema $AX=B$ segun los valores del parametro a.

b) Resuelva el sistema cuando $a=1$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a-3 & 0 & 4 & 2\\ 1 & 0 & -2 & -1\\ -1 & a & 2 & a\end{array}\right)$, $|A|=2a(a-1)=0\Longrightarrow a=0$ y $a=1$.

- Si $a\neq 0$ y $a\neq 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ n$^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 4 & 2\\ 1 & 0 & -2 & -1\\ -1 & 0 & 2 & 0\end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1=F_2\\ F_2=F_1\\ F_3-F_1\end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1\\ -3 & 0 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 2 & 0\end{array}\right)=$$

$$\begin{bmatrix} F_1\\ F_2+3F_1\\ F_3+F_1\end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 4 & 2\\ 1 & 0 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 2 & 1\end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1\\ 2F_2+F_1\\ 2F_3-F_1\end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

.

b) $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} -2x+4z=2 \\ x-2z=-1 \\ -x+y+2z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1+2\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 0.3.8 Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El precio medio de las 3 mascarillas es de 0,90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el precio de cada tipo de mascarilla.
Solución:
Sean x el nº de mascarillas quirúrgicas desechables, y al nº de mascarillas higiénicas y z el nº de mascarillas quirúrgicas reutilizables.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x+y+z}{3}=0,9 \\ 30x+20y+10z=56 \\ 20x+25z=31 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=2,7 \\ 15x+10y+5z=28 \\ 20x+25z=31 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0,8 \text{ €} \\ y=1,3 \text{ €} \\ z=0,6 \text{ €} \end{array}\right.$$

Problema 0.3.9 Resuelva la ecuacion matricial $XA + XA^t = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$XA + XA^t = B \Longrightarrow X(A + A^t) = B \Longrightarrow X = B(A + A^t)^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

0.4. Asturias

0.4.1. Modelo de 2020

Problema 0.4.1 Discutir el sistema y resolver en los casos compatibles

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y+z=a \\ 2x+y+2z=2a \\ 2x+y+3z=3 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right), \ |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2.$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2a \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3a = 0 \Longrightarrow a = 1$$

- Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A_4| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2 \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.
- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 1 \end{array}\right.$$

Problema 0.4.2 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula:

a) Su rango.

b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes.

c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes.

Solución:

a) $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

b) Por ser el rango 3 y tener cuatro columnas una de ellas debe de ser combinación de las otras. Por ejemplo: $C_2 = 0C_1 + 3C_3 + 0C_4 = 3C_3$.

c) Como el rango es 3 las tres filas son linealmente independientes. No se puede obtener una fila por combinación lineal de las otras.

0.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.4.3 Dado Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora?

b) Además, si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente un 50 %, un 80 % y un 75 % de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio inicial de cada artículo.

Solución:
Sea x el precio del libro, y el precio de la calculadora y z el precio del estuche.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=38 \text{ €} \\ y=19-\lambda \text{ €} \\ z=\lambda \text{ €} \end{array}\right.$$

El valor del libro es 38 € pero no podemos saber el valor de la calculadora.

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \\ 0,5x+0,8y+0,75z=34 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \\ 10x+16y+15z=680 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=38 \text{ €} \\ y=15 \text{ €} \\ z=4 \text{ €} \end{array}\right.$$

Problema 0.4.4 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Discute el rango de A según los valores de $m \in \mathbb{R}$.

b) ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A \cdot X = B$?

c) Calcula la matriz X del apartado anterior para $m = 0$.

Solución:

a) $|A| = m^2 - 1 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$

- Si $m \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
- Si $m = 1 \Longrightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.
- Si $m = -1 \Longrightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

b) $\text{Dim}(A) = 3 \times 3$ y $\text{Dim}(B) = 3 \times 2$ luego la dimensión de X debe ser $\text{Dim}(X) = 3 \times 2$.

c) Para $m = 0 \Longrightarrow |A| = -1 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

$$A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

0.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.4.5 Dado el sistema $\left\{\begin{array}{l} x+y=a \\ (2-a)x+2y=1 \\ ax=a \end{array}\right. \quad a \in \mathbb{R}$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a.

b) Resuélvelo cuando sea posible.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2-a & 2 & 1 \\ a & 0 & a \end{array}\right)$, $|A| = a(1-a) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 1$.

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$ Rango$(A) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.
- Si $a = 0$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$
- Si $a = 1$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] =$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

b) $a = 1$:
$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \\ x = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Problema 0.4.6 Dada la matriz $A = \left(\begin{array}{ccc} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{array}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

a) Calcula su determinante aplicando sus propiedades y estudia cuándo es invertible la matriz.

b) Para $x = 1$, calcula su inversa.

Solución:

a) $\left|\begin{array}{ccc} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{array}\right| = \left[\begin{array}{c} C_1 - C_2 \\ C_2 \\ C_3 \end{array}\right] = \left|\begin{array}{ccc} 0 & x+1 & x-2 \\ 0 & x & 2-x \\ 1 & x-1 & x \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} x+1 & x-2 \\ x & 2-x \end{array}\right| =$
$\left[\begin{array}{c} F_1 + F_2 \\ F_2 \end{array}\right] = \left|\begin{array}{cc} 2x+1 & 0 \\ x & 2-x \end{array}\right| = (2x+1)(2-x) = -2x^2 + 3x + 2$
$-2x^2 + 3x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$ y $x = 2 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{3}, 2\right\}$.

b) Si $x = 1 \Longrightarrow A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{array}\right)$

0.5. Cantabria

0.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.5.1 Considera la ecuación $AXA^t = B$ en donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,y A^t denota traspuesta de A.

a) Despeja la matriz X en la igualdad dada.

b) Comprueba que A es invertible y calcula su inversa.

c) Comprueba que $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$.

d) Calcula X.

Solución:

a) Como $|A| = |A^t| = -2 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ y $\exists \left(A^t\right)^{-1} \Longrightarrow AXA^t = B \Longrightarrow X = A^{-1}B\left(A^t\right)^{-1}$

b) $|A| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\left(A^{-1}\right)^t = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\left(A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$$

d) $X = A^{-1}B\left(A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$

Problema 0.5.2 En un juego de mesa se pueden comprar tanques, submarinos y aviones por 1, 3 y 5 diamantes, respectivamente. El rival ha gastado 41 diamantes. Sabemos que tiene el doble de submarinos que de tanques, y que el número de submarinos más el de aviones es 10.

a) Con la información dada, plantea un sistema de ecuaciones para hallar el número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival.

b) Clasifica el sistema.

c) Resuelve el sistema.

Solución:
Sean x el nº de tanques, y el nº de submarinos y z el nº de aviones.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} x + 3y + 5z = 41 \\ y = 2x \\ y + z = 10 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 3y + 5z = 41 \\ 2x - y = 0 \\ y + z = 10 \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 41 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 41 \\ 0 & -7 & -10 & -82 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 7F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 41 \\ 0 & -5 & -5 & -41 \\ 0 & 0 & -3 & 12 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible determinado.

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x + 3y + 5z = 41 \\ 2x - y = 0 \\ y + z = 10 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 6 \\ z = 4 \end{array}\right.$$

0.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.5.3 Considera el sistema de ecuaciones: $\left\{\begin{array}{l} x+(1-t)y=t \\ (1+t)x-3y=-t \end{array}\right.$ dependiente del parámetro t.

a) Determina para qué valores de t el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro t si es necesario.

b) Determina para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

c) Determina para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1-t & t \\ 1+t & -3 & -t \end{array}\right)$, $|A|=t^2-4=0 \Longrightarrow t=\pm 2$.
Si $m\neq \pm 3 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única). Resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\left|\begin{array}{cc} t & 1-t \\ -t & -3 \end{array}\right|}{|A|}=\frac{-t^2-2t}{t^2-4}=-\frac{t}{t-2}$$

$$y=\frac{\left|\begin{array}{cc} 1 & t \\ 1+t & -t \end{array}\right|}{|A|}=\frac{-t^2-2t}{t^2-4}=-\frac{t}{t-2}$$

b) Si $t=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\text{Sistema compatible indeterminado} \Longrightarrow x+3y=-2 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2-3\lambda \\ y=\lambda \end{array}\right.$$

c) Si $t=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-3F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Problema 0.5.4 Considera la ecuación matricial $AX-X=B$, siendo $A=\left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & a \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{array}\right)$, en donde a es un parámetro real.

a) Despeja la matriz X de la ecuación anterior.

b) Halla los valores de a para los que no es posible calcular X.

c) Calcula X para $a=1$.

Solución:

a) $AX - X = B \Longrightarrow (A-I)X = B \Longrightarrow (A-I)^{-1}B$.

b) $|A-I| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix} = a = 0 \Longrightarrow$ si $a=0$ $\nexists (A-I)^{-1} \Longrightarrow$ la ecuación no tiene solución.

c) Si $a=1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y tenemos:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$$

0.6. Castilla La Mancha

0.6.1. Modelo de 2020

Problema 0.6.1 Se pide:

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax + 2y = a^2 \\ -x + y + z = 5 \\ x - ay - z = -(4+a) \end{cases}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 0 & a^2 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -a & -1 & -(4+a) \end{array} \right)$, $|A| = a(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0.$ y $a = 1$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \longrightarrow F_3 \\ F_2 \\ F_3 \longrightarrow F_1 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) $a = 1$:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + y + z = 5 \\ x - y - z = -5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 6 - 3\lambda \end{cases}$$

Problema 0.6.2 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \ \text{y} \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $AX - 2B = C$.

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $AX - 2B = C \Longrightarrow X = A^{-1}(C + 2B) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 10 \\ -9 & -12 & -23 \end{pmatrix}$$

0.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.6.3 Se pide:

a) Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 - F_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$-a \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = -a\,[a(a+1) - 2] = -a(a^2 + a - 2) = 0 \Longrightarrow a = 0,\ a = -2$ y $a = 1$.

Luego $\nexists A^{-1}\ \forall a \in \{-2, 0, 1\}$

b) $CD = DC \Longrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 3y+z & y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y & z+3 \\ x-y & 1-z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+1 = 3x+y \\ x-1 = z+3 \\ 3y+z = x-y \\ y-z = 1-z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x-z = 4 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 4+\lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \text{con } \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 0.6.4 Se pide:

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} ax - ay - z = a \\ ax - ay = a \\ ax + 2y - z = 1 \end{cases}$$

b) Resuelve razonadamente es sistema anterior para a $a = 2$, si es posible.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -a & -1 & a \\ a & -a & 0 & a \\ a & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$, $|A| = -a(a+2) = 0 \Longrightarrow a = -2$ y $a = 0$.

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) $k = 2$:

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 2 \\ 2x - 2y = 2 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3/4 \\ y = -1/4 \\ z = 0 \end{cases}$$

0.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.6.5 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$; donde I_3 es la matriz identidad.

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $AX + I_3 = BC \Longrightarrow X = A^{-1}(BC - I_3) =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 0.6.6 Se pide:

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + 2y + az = a \\ x + ay + 2z = a \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

b) Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ 1 & a & 2 & a \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$, $|A| = a^2 + 2a - 8 = 0 \Longrightarrow a = -4$ y $a = 2$.

- Si $a \neq -4$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

b) $a = 2$:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

0.7. Castilla León

0.7.1. Modelo de 2020

Problema 0.7.1 Se pide:

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ.

$$\begin{cases} \lambda x + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

b) Resolverlo para $\lambda = 1$

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, $|A| = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -2$ y $\lambda = 1$.

- Si $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $\lambda = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 + F_1 \\ 2F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Problema 0.7.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, calcúlense a y b para que se verifiquen $|MA| = 2$ y $|M + B| = 3$, donde se esta usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz.

Solución:

$$|MA| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ a+2b & 2a+5b \end{vmatrix} = b - a = 2$$

$$|M+B| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a+1 & b+1 \end{vmatrix} = -a + 2b + 1 = 3 \Longrightarrow -a + 2b = 2$$

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ -a + 2b = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$$

0.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.7.3 Se considera el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x - y + az = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + ay - 2z = 0 \end{cases}$.

a) Estudie la existencia y número de soluciones según los valores del parámetro real a.

b) Resuélvalo, si es posible, para el valor del parámetro $a = -1$.

Solución:

Se trata de un sistema homogéneo.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{pmatrix}$, $|A| = a^2 - a = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -1$.

- Si $a \neq 0$ y $a \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 =$nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución trivial $x = y = z = 0$)
- Si $a = -1$:
  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $|A| = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.
- Si $a = 1$:
  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $|A| = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) $a = -1$:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 0.7.4 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{pmatrix}$

a) Indique para que valores de a existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Si $a = 4$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, encuentre la matriz X que verifica que $B + XA = C$.

Solución:

a) $|A| = a^2 - 3a = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 3 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{0, 3\}$.

b) Si $a = 4 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 5/4 \end{pmatrix}$

$B + XA = C \Longrightarrow X = (C - B)A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 5/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

0.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.7.5 Se pide:

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ.

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

b) Resolverlo para $\lambda = 1$

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$, $|A| = \lambda^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$ y $\lambda = 0$.

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $\lambda = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \longrightarrow F_2 \\ F_2 \longrightarrow F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 0.7.6 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$.

a) Encontrar los valores de m y n para que se verifique:

$$A^2 = A^t \quad (A^t \equiv \text{la traspuesta de} A)$$

b) ¿Para qué valores de m y n la matriz A no es invertible?

Solución:

a) $A^2 = A^t \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m(n+1) & n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = m \\ m(n+1) = 0 \\ n^2 = n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m = n = 0 \\ m = 0, \ \ n = 1 \end{cases}$$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{vmatrix} = n \Longrightarrow \exists A^{-1} \ \ \forall m \in \mathbb{R}$ y $\forall n \in \mathbb{R} - \{0\}$

0.8. Cataluña

0.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.8.1 Considera el sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real k:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

a) Discutir el sistema para los diferentes valores del parámetro k.

b) Resolver, si es posible, el sistema para el caso $k = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ k & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -k & 23+k \end{array}\right); \quad |A| = k^2 - 6k - 40 = 0 \Longrightarrow k = -4, \ \ k = 10$$

- Si $k \neq -4$ y $k \neq 10 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $k = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ -4 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & 4 & 19 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 5F_2 + 4F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 14 & 56 & 216 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $k = 10$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 10 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -10 & 33 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \end{array} \right)$$

$$\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $k = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x + y + 4z = 19 \\ 2y + 8z = 28 \\ 5x + y = 23 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 18 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Problema 0.8.2 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

a) Obtener la matriz X que satisfaga la ecuación $AX = I - 3X$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) Comprobar que X es invertible y calcular su inversa.

Solución:

a) $AX = I - 3X \Longrightarrow AX + 3X = I \Longrightarrow (A + 3I)X = I \Longrightarrow X = (A + 3I)^{-1}$

$$X = (A + 3I)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

b) $|X| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \exists X^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

0.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.8.3 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a - 7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Estudiar el rango de A para los diferentes valores del parámetro real a.

b) Comprobar que para $a = 4$ la matriz A es invertible y se verifica $A^{-1} = A^2$.

Solución:

a) $|A| = -a^2 + 8a - 15 = 0 \Longrightarrow a = 5$ y $a = 3$.

- Si $a \neq 5$ y $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
- Si $a = 3 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow$ $\text{Rango}(A) = 2$.
- Si $a = 5 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ $\text{Rango}(A) = 2$.

b) Si $a=4\Longrightarrow A=\left(\begin{array}{rrr} 4 & -3 & 0\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{array}\right)\Longrightarrow A^{-1}=\left(\begin{array}{rrr} 4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{array}\right)$.

$$A^2=\left(\begin{array}{rrr} 4 & -3 & 0\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{array}\right)^2=\left(\begin{array}{rrr} 4 & -3 & 0\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{array}\right)\left(\begin{array}{rrr} 4 & -3 & 0\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{rrr} 4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Luego $A^{-1}=A^2$

0.9. Comunidad Valenciana

0.9.1. Modelo de 2020

Problema 0.9.1 Se da el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} 2x+3z=\alpha\\ x-2y+2z=5\\ 3x-y+5z=\alpha+1\end{array}\right.$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado.

b) La solución del sistema cuando $\alpha=-1$.

c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x,y,z) que verifique $x+y+z=0$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|c} 2 & 0 & 3 & \alpha\\ 1 & -2 & 2 & 5\\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1\end{array}\right)$, $|A|=-1\neq 0\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

b) Si $\alpha=-1\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2x+3z=-1\\ x-2y+2z=5\\ 3x-y+5z=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=7\\ y=-4\\ z=-5\end{array}\right.$

c) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|c} 2 & 0 & 3 & \alpha\\ 1 & -2 & 2 & 5\\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 2F_2-F_1\\ 2F_3-3F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|c} 2 & 0 & 3 & \alpha\\ 0 & -4 & 1 & 10-\alpha\\ 0 & -2 & 1 & -\alpha+2\end{array}\right)=$

$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 2F_3-F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|c} 2 & 0 & 3 & \alpha\\ 0 & -4 & 1 & 10-\alpha\\ 0 & 0 & 1 & -\alpha-6\end{array}\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=9+2\alpha\\ y=-4\\ z=-6-\alpha\end{array}\right.$

Como $x+y+z=0\Longrightarrow(9+2\alpha)+(-4)+(-6-\alpha)=0\Longrightarrow\alpha=1\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=11\\ y=-4\\ z=-7\end{array}\right.$

Problema 0.9.2 Se dan las matrices $A=\left(\begin{array}{rr} 1 & 4\\ -1 & 6\end{array}\right)$ y $X=\left(\begin{array}{c} x\\ y\end{array}\right)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX=\alpha X$ sólo admite una solución.

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX=5X$.

c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $AX = \alpha X \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x + 4y = \alpha x \\ -x + 6y = \alpha y \end{array} \right. \Longrightarrow,$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-\alpha)x + 4y = 0 \\ -x + (6-\alpha)y = 0 \end{array} \right.$$

Se trata de un sistema homogéneo.
$\begin{vmatrix} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{vmatrix} = a^2 - 7a + 10 = 0 \Longrightarrow a = 2$ y $a = 5$.
El sistema tiene solución única para cualquier valor real a distinto de $a = 2$ y $a = 5$. $(\forall a \in \mathbb{R} - \{2, 5\})$.

b) Si $\alpha = 5$:

$$\left\{ \begin{array}{r} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = t \end{array} \right.$$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$
$2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow AX = 2X.$
Ahora tenemos
$AX = 2X,$
$A^2X = AAX = 2AX = 2^2X,$
$A^3X = AA^2X = A2^2X = 2^3X,$
$A^4X = AA^3X = A2^3X = 2^4X, \cdots\cdots\cdots, A^{100}X = 2^{100}X \Longrightarrow \beta = 2^{100}.$

0.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.9.3 Dado el sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = -2 \end{array} \right.$, siendo a un parámetro real, obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El estudio del sistema en función del parámetro a.

b) Las soluciones del sistema cuando $a = -2$.

c) La solución del sistema cuando $a = 0$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$, $|A| = -a^3 + 3a - 2 = 0 \Longrightarrow a = -2$ y $a = 1$.

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Luego el sistema es compatible indeterminado.

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

  Luego el sistema es incompatible.

b) $a = -2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c) $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ y + z = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Problema 0.9.4 Se dan las matrices $A = \left(\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{array}\right)$, y $B = \left(\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{array}\right)$, que dependen del parámetro real b.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa.

b) Los valores de b para que la matriz A^TA tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A.

c) La inversa de A^TA, cuando dicha inversa exista.

Solución:

a) $|AB| = \left|\left(\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{array}\right)\right| = \left|\begin{array}{rrr} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow \nexists (AB)^{-1} \;\; \forall b \in \mathbb{R}.$

$|BA| = \left|\left(\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{array}\right)\right| = \left|\begin{array}{rr} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{array}\right| = -2(b^2 - 6) = 0 \Longrightarrow$

$b = \pm\sqrt{6} \Longrightarrow \exists (AB)^{-1} \;\; \forall b \in \mathbb{R} - \left\{\pm\sqrt{6}\right\}.$

b) $|A^TA| = \left|\left(\begin{array}{rrr} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{array}\right)\right| = \left|\begin{array}{cc} b^2 + 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{array}\right| = 8(b^2 + 2) \neq 0 \Longrightarrow$

$\exists (A^TA)^{-1} \;\; \forall b \in \mathbb{R}.$

c) $A^TA = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{b^2+2} & 0 \\ & \\ 0 & \dfrac{1}{8} \end{pmatrix}$

0.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.9.5 Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+ay+2z=3 \\ x-3y+az=-2 \\ x+y+2z=a \end{cases}$, donde a es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de a para los cuales el sistema es compatible.

b) La solución del sistema cuando $a=0$.

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 3 \\ 1 & -3 & a & -2 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{array}\right)$, $|A| = a^2-3a+2=0 \Longrightarrow a=1$ y $a=2$.

- Si $a\neq 1$ y $a\neq 2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3-F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a=1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) =$$

$$\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) $a=0$:

$$\begin{cases} x+2z=3 \\ x-3y=-2 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=-3 \\ z=7 \end{cases}$$

c) $a=2$:

$$\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ x-3y+2z=-2 \\ x+y+2z=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases}$$

Problema 0.9.6 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa.

b) Dos constantes a, b de modo que $A^{-1} = A^2 + aA + bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$ siendo I la matriz identidad.

c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenga infinitas soluciones. Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema.

Solución:

a) $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0 \Longrightarrow A(A^2 - 3A + 3I) = I \Longrightarrow A^{-1} = A^2 - 3A + 3I \Longrightarrow a = -3$ y $b = 3$. Bastaría comprobar que $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$

$$A^2 - 3A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

c) $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)x + 2y \\ (1-\lambda)y \\ 2y + (1-\lambda)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Se trata de un sistema homogéneo

$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Longrightarrow |A - \lambda I| = (1-\lambda)^3 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$

- Si $\lambda \neq 1 \Longrightarrow |A - \lambda I| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A - \lambda I) = 3 \Longrightarrow$ sistema compatible determinado cuya solución única es la trivial $x = y = z = 0$.
- Si $\lambda = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ y el sistema es compatible indeterminado. (Infinitas soluciones)

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ 0 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = l \end{cases}$$

0.10. Extremadura

0.10.1. Modelo de 2020

Problema 0.10.1 Se pide:

a) Estudie el siguiente sistema en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=4 \\ x+a^2y-z=3-a \\ x-y+az=1 \end{array}\right.$$

b) Resuelva es sistema, si es posible, para el valor $a=2$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & a^2 & -1 & 3-a \\ 1 & -1 & a & 1 \end{array}\right)$, $|A|=a^3+a^2-a-1=0 \Longrightarrow a=\pm 1$.

- Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\text{Sistema incompatible}$$

b) $a=2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=4 \\ x+4y-z=1 \\ x-y+2z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=10/3 \\ y=-1 \\ z=-5/3 \end{array}\right.$$

Problema 0.10.2 Resuelva la ecuación matricial $AX-A=I-AX$ siendo I la matriz identidad de orden 3 y la matriz $A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Solución:
$AX-A=I-AX \Longrightarrow 2AX=I+A \Longrightarrow X=(2A)^{-1}(I+A)=$

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right)^{-1}\left[\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\right]=$$

$$\frac{1}{6}\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right)=\frac{1}{6}\left(\begin{array}{ccc} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

0.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.10.3 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Estudie los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la matriz tiene inversa.

b) Calcule la inversa para $k = 1$.

Solución:

a) $|A| = k^2 - k - 2 = 0 \Longrightarrow k = -1$ y $k = 2 \Longrightarrow \exists A^{-1} \;\; \forall k \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

b) Si $k = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

Problema 0.10.4 Discuta en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + \lambda y - z = 1 \\ -\lambda x + y = \lambda \\ (\lambda + 3)y - 2z = 4 \end{cases}$$

Solución:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & (\lambda+3) & -2 & 4 \end{array}\right)$, $|A| = -\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$ y $\lambda = 2$.

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

0.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.10.5 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los productos de matrices AB y BA. ¿Se cumple que $AB = BA$?

b) Compruebe si es cierta la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + B^2$.

Solución:

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow AB \neq BA$

b) $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$. Para que se cumpla la igualdad del enunciado es necesario que $AB = -BA$, por el apartado anterior no es cierto, luego la igualdad en cuestión no se cumple.

Problema 0.10.6 Se pide:

a) Estudie en función del parámetro λ el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + \lambda z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ \lambda x - y + z = 1 \end{cases}$$

b) Resuelve el sistema (si es posible) para $\lambda = 1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 1 - \lambda^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 1.$

- Si $\lambda \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única). Los tres planos se cortan en un punto.
- Si $\lambda = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $\lambda = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+z=1\\ x+y+z=1\\ x-y+z=1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-t\\ y=0\\ z=t\end{array}\right.$$

0.11. Galicia

0.11.1. Modelo de 2020

Problema 0.11.1 Se pide:

a) Suponiendo que A e X son matrices cuadradas y que $A+I$ es invertible, despeje X en la ecuación $A-X=AX$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, calcule X tal que $A-X=AX$.

Solución:

a) $A-X=AX \Longrightarrow AX+X=A \Longrightarrow (A+I)X=A \Longrightarrow X=(A+I)^{-1}A$.

b) $X=(A+I)^{-1}A = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 4/5 & 1/5\\ -1/5 & 1/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5\\ 1/5 & 4/5\end{pmatrix}$

Problema 0.11.2 Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-y+3z=0\\ my+(3-m)z=-6\\ 2x-y+mz=6\end{array}\right.$$

Solución:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0\\ 0 & m & 3-m & -6\\ 2 & -1 & m & 6\end{array}\right)$, $|A| = 2m(m-3)=0 \Longrightarrow m=0$ y $m=3$.

- Si $m\neq 0$ y $m\neq 3 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$ Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $m=0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -6\\ 2 & -1 & 0 & 6\end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_1\end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -6\\ 0 & 0 & -3 & 6\end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2\end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $m=3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -6\\ 2 & -1 & 3 & 6\end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_1\end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

0.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.11.3 Sean A y B las dos matrices que cumplen $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular A^2-B^2 . (Advertencia: en este caso, $A^2-B^2\neq(A-B)(A+B)$)

b) Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA+(A+B)^T=2I+XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $(A+B)$.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ A-B=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \\ B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

a) $A^2-B^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

b) $XA+(A+B)^T=2I+XB\Longrightarrow XA-XB=2I-(A+B)^T\Longrightarrow X(A-B)=2I-(A+B)^T\Longrightarrow$ $X=\left[2I-(A+B)^T\right](A-B)^{-1}$

$$X=\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right]^T\right]\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1}=$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T\right]\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}^{-1}=$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -1/8 & 1/4 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/8 & 1/4 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 0.11.4 Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} mx+y=2m \\ x+z=0 \\ x+my=0 \end{array}\right.$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

Solución:

$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array}\right)$, $|A|=1-m^2=0\Longrightarrow m=\pm 1$.

- Si $m\neq\pm 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$ Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $m=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+F_1 \\ F_3+F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema incompatible

- Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

0.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.11.5 Para la ecuacion matricial $A^2X + AB = B$, se pide:

a) Despejar X suponiendo que A (y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4×4 y B tuviera 3 columnas.

b) Resolverla en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A^2X + AB = B \Longrightarrow A^2X = B - AB \Longrightarrow X = \left(A^2\right)^{-1}(B - AB)$
Tendríamos $\dim(A) = 4 \times 4 \Longrightarrow \dim(B) = 4 \times 3 \Longrightarrow \dim(B - AB) = 4 \times 3$.
Por otro lado $\dim(A) = 4 \times 4 \Longrightarrow \dim(A^2) = 4 \times 4 \Longrightarrow \dim\left(\left(A^2\right)^{-1}\right) = 4 \times 4$
Luego $\dim(X) = 4 \times 3$

b) $X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2\right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right]$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix}\right] =$

$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lo hacemos de otra manera más simple. Observamos que $B = -A$ y sustituimos este dato en la ecuación y nos queda:
$X = \left(A^2\right)^{-1}(B - AB) = \left(A^2\right)^{-1}(-A + A^2) = -\left(A^2\right)^{-1}A + \left(A^2\right)^{-1}A^2 = -(AA)^{-1}A + I = -A^{-1}A^{-1}A + I = -A^{-1} + I$

$$X = -A^{-1} + I = -\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 0.11.6 Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m \\ (m+3)x + my = 3m + 6 \end{cases}$$

Solución:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} m+3 & -m^2 & 3m \\ m+3 & m & 3m+6 \end{array}\right)$, $|A| = m(m+1)(m+3) = 0 \Longrightarrow m = 0$, $m = -1$ y $m = -3$.

- Si $m \in \mathbb{R} - \{0, -1, -3\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = 0$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$
- Si $m = -1$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$
- Si $m = -3$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -9 & -9 \\ 0 & -3 & -3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$
Sistema compatible indeterminado

0.12. Islas Baleares

0.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 0.12.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ ax + z = 0 \\ x + (1 - a)y + az = a + 1 \end{array} \right.$$

Determina el parámetro real a, siempre que sea posible, de manera que el sitema:

a) Tenga solución única.

b) Tenga infinitas soluciones.

c) No tenga solución.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1-a & a & a+1 \end{array} \right), \ |A| = -a^2 + a = 0 \Longrightarrow a = 0 \text{ y } a = 1.$$

a) Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

b) Si $a = 0$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$
Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

c) Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\1&0&1&0\\1&0&1&2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c}F_1\\F_2-F_1\\F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&-1&1&-1\\0&-1&1&1\end{array}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{c}F_1\\F_2\\F_3-F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&-1&1&-1\\0&0&0&2\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

En este caso el sistema no tiene solución.

Problema 0.12.2 Una empresa tiene tres minas: A, B y C, y en cada una, el mineral extraído contiene los elementos químicos: níquel (Ni), cobre (Cu) y hierro (Fe), en diferente concentración. Las concentraciones son:

- Mina A: Ni (1 %), Cu (2 %), Fe (3 %),
- Mina B: Ni (2 %), Cu (5 %), Fe (7 %),
- Mina C: Ni (1 %), Cu (3 %), Fe (1 %).

Para obtener 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro en total, ¿cuántas toneladas de mineral se han de extraer de cada mina?

a) Plantea un sistema de ecuaciones que interprete el enunciado.

b) Clasifica el sistema.

c) Resuelve el sistema.

Solución:
Sea x el nº de toneladas extraídas en la mina A, y el nº de toneladas extraídas en la mina B y z el nº de toneladas extraídas en la mina C.

a)

	Ni	Cu	Fe
A	$0,01x$	$0,02x$	$0,03x$
B	$0,02y$	$0,05y$	$0,07y$
C	$0,01z$	$0,03z$	$0,01z$
	7	18	16

$$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}0,01x+0,02y+0,01z=7\\0,02x+0,05y+0,03z=18\\0,03x+0,07y+0,01z=16\end{array}\right.\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}x+2y+z=700\\2x+5y+3z=1800\\3x+7y+z=1600\end{array}\right.$$

b) $|A|=\left|\begin{array}{ccc}1&2&1\\2&5&3\\3&7&1\end{array}\right|=-3\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$ Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

c)

$$\left\{\begin{array}{l}x+2y+z=700\\2x+5y+3z=1800\\3x+7y+z=1600\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=200\\y=100\\z=300\end{array}\right.$$

0.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 0.12.3 Dada la ecuación matricial $MX + N = P$, donde X es la matriz incógnita y $M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores del parámetro real a existe la inversa de M?

b) Calcula la matriz inversa de M.

c) Para $a = 2$ resuelve la ecuación matricial, si es posible.

d) Con los valores de a, para los que existe la matriz inversa de M, resolver la ecuación matricial.

Solución:

a) $|M| = -a^2 - a = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -1 \Longrightarrow \exists M^{-1}\ \ \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

b) $M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \dfrac{1}{a(a+1)} \begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$

c) $MX + N = P \Longrightarrow MX = P - N \Longrightarrow X = M^{-1}(P - N)$

$$X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$X = \frac{1}{a(a+1)}\begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{a(a+1)}\begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{2}{a+1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$$

Problema 0.12.4 Sean las matrices A y B

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula AB y $(AB)^t$, donde la "t" indica traspuesta.

b) ¿Es posible calcular B^2? Si lo es calcúlala.

c) Calcula el rango de A para los diferentes valores del parámetro x.

Solución:

a) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 & 7 \\ 12 & 14 \\ 18 & 21 \end{pmatrix}$

$(AB)^t = \begin{pmatrix} x+2 & 12 & 18 \\ 7 & 14 & 21 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no se pueden multiplicar, el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda.

c) $|A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) < 3$.

Cogemos el menor de orden dos $\begin{vmatrix} 3 & x \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 6x = 0 \Longrightarrow x = 4$.

- Si $x \neq 4 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 3 & x \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.
- Si $x = 4 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ donde $F_2 = 2F_1$ y $F_3 = 3F_1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$.

0.13. Islas Canarias

0.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.13.1 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$

a) Halle los valores del parámetro k para los que la matriz A tiene inversa.

b) Tomando el valor $k = -1$ en la matriz A, calcule la matriz X que verifica que: $AX = 24I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $|A| = k^3 - 6k^2 + 5k = 0 \Longrightarrow k = 0$, $k = 1$ y $k = 5 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \ \forall k \in \mathbb{R} - \{0, 1, 5\}$.

b) Si $k = -1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = -\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$AX = 24I_3 \Longrightarrow X = A^{-1}24I_3 = 24A^{-1} = -\frac{24}{12}\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 \\ -4 & -10 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Problema 0.13.2 Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes. Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto?

Solución:

Sea x el número de cajas de bombones, y el número de tabletas de chocolate y z el número de paquetes de chocolate en polvo.

	Chocolate	leche
bombones	2	6
tabletas	4	4
chocolate	1	4
existencias	24	60

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 2x+4y+z=24 \\ 6x+4y+4z=60 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=6 \\ y=2 \\ z=4 \end{array}\right.$$

0.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.13.3 Dadas la matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ y
$C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$
Se plantea la siguiente ecuacion matricial: $XA-C^t=XB$

a) Justifique razonadamente cuál es la dimensión de la matriz X.

b) Halle la matriz X que cumple la ecuación.

Solución:

a) $XA-C^t=XB \Longrightarrow XA-XB=C^t \Longrightarrow X(A-B)=C^t \Longrightarrow X=C^t(A-B)^{-1}$.
Tenemos que $\dim(C^t)=2\times 3$ y $\dim(A-B)^{-1}=3\times 3 \Longrightarrow \dim(X)=2\times 3$.
Se pueden multiplicar porque el número de columnas de C^t es igual al número de filas de $(A-B)^{-1}$, que es 3, y se obtiene una matriz X con el número de filas de la matriz C^t, que es 2, y número de columnas de la matriz $(A-B)^{-1}$, que es 3. Es decir, $\dim(X)=2\times 3$

b) $X=C^t(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix}\right]^{-1}=$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 0.13.4 Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A=\left\{\begin{array}{l} kx+2y+6z=0 \\ 2x+ky+4z=2 \\ 2x+ky+6z=k-2 \end{array}\right.$$

; se pide:

a) Discuta el sistema según los valores del parámetro k.

b) Resuelva el sistema para $k=0$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} k & 2 & 6 & 0 \\ 2 & k & 4 & 2 \\ 2 & k & 6 & k-2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=2(k^2-4)=0 \Longrightarrow k=\pm 2$. Luego

- Si $k\neq\pm 2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$\overline{A}=$nº de incógnitas$\Longrightarrow$ sistema compatible determinado.

- Si $k=2$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 0\\ 2 & 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 6 & 0\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$ Luego se trata de un sistema compatible indeterminado.
- Si $k=-2$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 6 & 0\\ 2 & -2 & 4 & 2\\ 2 & -2 & 6 & -4\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+F_1\\ F_3+F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 10 & 2\\ 0 & 0 & 12 & -4\end{array}\right)\Longrightarrow$ Luego se trata de un sistema incompatible.

b) Si $k=0$: $\left\{\begin{array}{l} 2y+6z=0\\ 2x+4z=2\\ 2x+6z=-2\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=5\\ y=6\\ z=-2\end{array}\right.$

0.14. La Rioja

0.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.14.1 Sea la matriz $A=\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ m & 0 & 2\end{array}\right)$, $m\in\mathbb{R}-\{0\}$.

a) Hallar α y β de tal forma que $A^2=\alpha A+\beta I$, siendo I la matriz identidad.

b) Calcular A^5 utilizando la anterior igualdad.

Solución:

a) $A^2=\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ m & 0 & 2\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ m & 0 & 2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 4m & 0 & 4\end{array}\right)=2A$

$A^2=\alpha A+\beta I=\alpha\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ m & 0 & 2\end{array}\right)+\beta\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 4m & 0 & 4\end{array}\right)=$

$\beta\left(\begin{array}{ccc} 2a+b & 0 & 0\\ 0 & 2a+b & 0\\ am & 0 & 2a+b\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 4m & 0 & 4\end{array}\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2a+b=4\\ am=4m\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} a=4\\ b=-4\end{array}\right.\Longrightarrow$

$A^2=4A-4I$.

b) $A^5=AA^2A^2=A(4A-4I)(4A-4I)=A(16A^2-16A-16A+16I)=16A(A^2-2A+I)=16A[(4A-4I)-2A+I]=16A(2A-3I)=16(2A^2-3A)=16[2(4A-4I)-3A]=16(5A-8I)$

$$A^5=16\left[5\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ m & 0 & 2\end{array}\right)-8\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)\right]=\left(\begin{array}{ccc} 32 & 0 & 0\\ 0 & 32 & 0\\ 80m & 0 & 32\end{array}\right)$$

Problema 0.14.2 Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\left\{\begin{array}{l} ay+(a+1)z=a\\ ax+z=a\\ x+az=-a\end{array}\right.$.

a) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a.

b) Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para a $a=2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & a+1 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a & -a \end{array} \right); \quad |A| = a - a^3 = 0, \ \ a = 0, \ a = \pm 1$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
  Resolvemos por Cramer:

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} a & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix}}{a - a^3} = \frac{a}{a-1}$$

  $$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & a & 1 \\ 1 & -a & a \end{vmatrix}}{a - a^3} = \frac{2a}{a-1}$$

  $$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix}}{a - a^3} = -\frac{a}{a-1}$$

- Si $a = -1$:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

  sistema compatible indeterminado

  $$\left\{ \begin{array}{l} -y = -1 \\ -x + z = -1 \\ x - z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

- Si $a = 1$:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{sistema incompatible}$$

  En este caso el sistema no tiene solución.

- Si $a = 0$:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

  sistema compatible indeterminado

  $$\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right. .$$

b) Si $a=2 \Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 2/3 & -1/3\\ 1/2 & 1/2 & -1\\ 0 & -1/3 & 2/3\end{pmatrix}$

Problema 0.14.3 Sean A y B las matrices: $A=\begin{pmatrix} -13 & 5\\ 10 & -5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 5 & -2\\ -4 & 2\end{pmatrix}$

a) Hallar X e Y, matrices soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 3X-5Y=A\\ -X+2Y=B\end{array}\right.$$

b) Calcular si existen las matrices inversa de X e Y.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{l} 3X-5Y=A\\ -X+2Y=B\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} X=2A+5B=2\begin{pmatrix} -13 & 5\\ 10 & -5\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 5 & -2\\ -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ \\ Y=A+3B=\begin{pmatrix} -13 & 5\\ 10 & -5\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 5 & -2\\ -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

b) $|X|=0 \Longrightarrow \nexists X^{-1}$
$|Y|=o \Longrightarrow \nexists Y^{-1}$

0.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.14.4 Discutir y resolver según el valor del parámetro real a, el sistema de ecuaciones lineales: $\left\{\begin{array}{l} (a-1)x+y+3az=1\\ ax+ay-z=a\\ (a-1)x+y+(a-1)z=-2a+1\end{array}\right.$.

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 1 & 3a & 1\\ a & a & -1 & a\\ a-1 & 1 & a-1 & -2a+1\end{array}\right); \quad |A|=-2a^3+3a^2+2a=0,\ a=0,\ a=2,\ a=-\frac{1}{2}$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\left\{0,2,-\frac{1}{2}\right\} \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
  Resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3a\\ a & a & -1\\ -2a+1 & 1 & a-1\end{vmatrix}}{-2a^3+3a^2+2a}=-\frac{2(3a^2+1)}{2a^2-3a-2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 3a\\ a & a & -1\\ a-1 & -2a+1 & a-1\end{vmatrix}}{-2a^3+3a^2+2a}=\frac{8a^2-a-4}{2a^2-3a-2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1\\ a & a & a\\ a-1 & 1 & -2a+1\end{vmatrix}}{-2a^3+3a^2+2a}=\frac{2a}{2a+1}$$

- Si $a=0$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & +1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -x+y=1\\ -z=0\\ -x+y-z=1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=0\end{array}\right.$$

- Si $a=2$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 6 & 1\\ 2 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -3\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-2F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 6 & 1\\ 0 & 0 & -13 & 0\\ 0 & 0 & -5 & -4\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 13F_3-5F_2\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 6 & 1\\ 0 & 0 & -13 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -52\end{array}\right)\Longrightarrow \text{sistema incompatible}$$

En este caso el sistema no tiene solución.

- Si $a=-1/2$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3/2 & 1 & -3/2 & 1\\ -1/2 & -1/2 & -1 & -1/2\\ -3/2 & 1 & -3/2 & 2\end{array}\right)=-\frac{1}{2}\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 3 & -2\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 3 & -4\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 3F_2-F_1\\ F_3\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 3 & -2\\ 0 & 5 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right)\Longrightarrow \text{sistema incompatible}$$

En este caso el sistema no tiene solución.

Problema 0.14.5 Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ x & y & z & t\\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2\\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3\end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ x & y & z & t\\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2\\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3\end{vmatrix}=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-xF_1\\ F_3-xF_2\\ F_4-xF_3\end{array}\right]=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & y-x & z-x & t-x\\ 0 & y^2-yx & z^2-zx & t^2-tx\\ 0 & y^3-y^2x & z^3-z^2x & t^3-t^2x\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} y-x & z-x & t-x \\ y^2-yx & z^2-zx & t^2-tx \\ y^3-y^2x & z^3-z^2x & t^3-tx \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & t \\ y^2 & z^2 & t^2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-yF_1 \\ F_3-yF_2 \end{bmatrix} =$$

$$(y-x)(z-x)(t-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z-y & t-y \\ 0 & z^2-y^2 & t^2-y^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)\begin{vmatrix} z-y & t-y \\ z^2-y^2 & t^2-y^2 \end{vmatrix} =$$

$$(y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z+y & t+y \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$$

Problema 0.14.6 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}$$

Hallar A^{-1} y A^{10}.
Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2m & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3m & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ nm & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0.15. Madrid

0.15.1. Modelo de 2020

Problema 0.15.1 Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78 % de nitrógeno, un 21 % de oxígeno y un 1 % de argón.

a) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.

b) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta. Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80 %	20 %	0 %
B	70 %	20 %	10 %
C	60 %	40 %	0 %

Solución:

a) Se necesitan: de nitrógeno $2000 \cdot 0,78 = 1560$ l, de oxígeno $2000 \cdot 0,21 = 420$ l y de argón $2000 \cdot 0,01 = 20$ l.

b) Se x el nº litros de mezcla A, y el nº litros de mezcla B y z el nº litros de mezcla C.

$$\left\{\begin{array}{l} 0,8x + 0,7y + 0,6z = 1560 \\ 0,2x + 0,2y + 0,4z = 420 \\ 0,1y = 20 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1700 \\ y = 200 \\ z = 100 \end{array}\right.$$

Problema 0.15.2 Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro t.

b) Resolver el sistema $AX = B$, para los valores de t que lo hagan compatible y determinado.

Solución:

a) Por Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

Si $t = 0$ el Rango$(A) = 1$ y si $t \neq 0$ el Rango$(A) = 2$.

b) El sistema es compatible determinado si Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas$= 2 \Longrightarrow$ $t \neq 0$ por el apartado anterior. Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 5 & 10+3t & 9 \\ -1 & -2 & 3t+3 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & -2t & -6 \\ 0 & t & 3t+6 \end{array}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & -2t & -6 \\ 0 & 0 & 6t+6 \end{array}\right) \Longrightarrow 6t + 6 = 0 \Longrightarrow t = -1$$

El sistema sería:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2y = -6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 6 \\ y = -3 \end{array}\right.$$

0.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.15.3 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{array}\right.$$

Se pide:

a) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = 0$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array}\right)$; $|A| = a(a+1) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -1$.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, -1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(A) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow SCD$: Sistema compatible determinado, solución única.
- Si $a = -1$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) =$
$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow SI$: sistema incompatible, no tiene solución.
- Si $a = 0$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow SCI$: sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 0.15.4 Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275,8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63,6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.
Solución:
Sea x el precio del kg de doradas, y el precio del kg de lubinas y z el precio del kg de rodaballos.

$$\left\{\begin{array}{l} 1374000x + 23440000y + 7400000z = 275800000 \\ 7400000z = 63600000 \\ x = 0,11 + y \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 5,7767 \text{ euros/kg} \\ y = 5,6667 \text{ euros/kg} \\ z = 8,5945 \text{ euros/kg} \end{array}\right.$$

0.15.3. Convocatoria Ordinaria junio (coincidente) de 2020

Problema 0.15.5 Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{c} (k+1)x + 3y + kz = 1 \\ 3x + (k+1)y + 2z = k-1 \\ kx + 2y + kz = 2 \end{array}\right. ,$$

se pide:

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real k.

b) Resolver el sistema para $k = -3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & 3 & k & 1 \\ 3 & k+1 & 2 & k-1 \\ k & 2 & k & 2 \end{array}\right); \quad |A| = k^2 - 4 = 0 \Longrightarrow k = \pm 2$$

- Si $k \neq \pm 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $k = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) = \left[\ F_1 = F_2\ \right] \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $k = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $k = -3$:

$$\left\{\begin{array}{l} -2x + 3y - 3z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = -4 \\ -3x + 2y - 3z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

Problema 0.15.6 Sean $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y A una matriz que verifica $AB = BC$. Se pide:

a) Calcular el determinante de A.

b) Calcular BCB^{-1}.

c) Encontrar el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que $BC\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $|AB| = |BC| \Longrightarrow |A||B| = |B||C| \Longrightarrow |A| = |C| = 6$

b)

$$BCB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

c) $BC\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

0.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.15.7 Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1,1,1,1)$ y $(1,2,3,4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

a) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.

b) Las tres filas de A son linealmente independientes.

c) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.

d) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.

e) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

Solución:

Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ con $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$.

a) Hacemos $F_3 = 5F_1 - F_2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Hacemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ con $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ las tres filas son linealmente independientes.

c) Tomamos la matriz anterior y tenemos:
$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$ $|A_1| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A_1) = 3 = \text{Rango}(A) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible determinado.

d) Tomamos la matriz del primer apartado: (Por Gauss)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

e) A la matriz anterior le cambiamos el último valor de la tercera fila: (Por Gauss)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible.

Problema 0.15.8 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se pide:

a) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

b) Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.

c) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $C = A^2 - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $BB^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$|BB^t| = 0 \Longrightarrow |D| = |ABB^t| = |A||BB^t| = 0$

0.16. Murcia

0.16.1. Modelo de 2020

Problema 0.16.1 Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a + 3 \end{cases}$$

a) Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 0$.

b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a+3 \end{array}\right); \quad |A| = -a^3 + 3a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ \ a = -2$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
Si $a = 0$:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 0 \\ y + z = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

b) Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

c) Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Problema 0.16.2 Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$

c) Determine si existe la inversa de A . En caso afirmativo, calcúlela.

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

c) $|A| = 1 \Longrightarrow \exists A^{-1} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

0.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.16.3 Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + a^2 y - z = 3 - a \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

a) Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 0$.

b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & a^2 & -1 & 3-a \\ 1 & -1 & a & 1 \end{array}\right); \quad |A| = a^3 + a^2 - a - 1 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
Si $a = 0$:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - z = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

b) Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -3\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=4\\ x+y-z=4\\ x-y-z=1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2}+\lambda\\ \\ y=\dfrac{3}{2}\\ \\ z=\lambda\end{array}\right.$$

c) Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 2 & -3\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema incompatible

Problema 0.16.4 Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} -1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

a) Compruebe que las matrices A y B son regulares (o inversibles) y calcule sus matrices inversas.

b) Resuelva la ecuacion matricial $AXB=A^t-3B$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) $|A|=-1\Longrightarrow \exists A^{-1}\Longrightarrow A$ es regular.$\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$.

$|B|=1\Longrightarrow \exists B^{-1}\Longrightarrow B$ es regular.$\Longrightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

b) $AXB=A^t-3B\Longrightarrow X=A^{-1}(A^t-3B)B^{-1}$

$$X=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & -9\\ 3 & 6\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 8\\ 0 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 28 & 38\\ -18 & -23\end{pmatrix}$$

0.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.16.5 Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2\\ x-ay+a^2z=-1\\ -ax+a^2y-a^3z=2\end{array}\right.$$

a) Comprueba que el sistema nunca tiene solución única.

b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones.

c) Si es posible, resuélvalo para el valor de $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & a^2 & -1 \\ -a & a^2 & -a^3 & 2 \end{array} \right); \quad |A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) < 3 \ \forall a \in \mathbb{R}$$

Luego el sistema no puede ser compatible determinado.

b) Tomamos otro menor de orden 3 de $\overline{A}$, $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & -1 \\ -a & a^2 & 2 \end{vmatrix} = a^2 - a - 2 = 0 \Longrightarrow$

$a = -1 \ \ a = 2$

- Si $a = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

sistema incompatible

- Si $a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -8 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 & 6 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

c)

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - 2y + 4z = -1 \\ -2x + 4y - 8z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 0.16.6 Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5 y A^6,

b) Calcule A^{2020}

c) Compruebe que la matriz A es regular (o invertible) y calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$A^5 = A^4A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^6 = A^5A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{2020} = \left(A^6\right)^{336} A^4 = I^{336} \cdot A^4 = A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

c) $|A| = 1 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

0.17. Navarra

0.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.17.1 Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x + (a^2+a)y = 2 \\ (-a-1)x - a^2y = 0 \\ ay + (a^2-1)z = 3-a \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & a^2+a & 0 & 2 \\ -a-1 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a & a^2-1 & 3-a \end{array}\right); \quad |A| = a(a+1)(a^2-1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = \pm 1$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única) Por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a^2+a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 3-a & a & a^2-1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2a^2(a^2-1)}{a(a+1)(a^2-1)} = -\frac{2a}{a+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 2 & 0 \\ -a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-a & a^2-1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2(a+1)(a^2-1)}{a(a+1)(a^2-1)} = \frac{2}{a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & a^2+a & 2 \\ -a-1 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a(a^2-1)}{a(a+1)(a^2-1)} = -\frac{1}{a+1}$$

- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 3\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+F_1\\ F_3\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 3\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema incompatible

- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 4\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+F_1\\ F_3\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+2y=2\\ -2x-y=0\\ y=2\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-1\\ y=2\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 0.17.2 Sean A y B dos matrices de tamano 3 tales que $|A|=|B|=\dfrac{1}{2}$. Calcula $|C|$ teniendo en cuenta que la matriz C es la siguiente:

$$C=(2A^tB^{-1})^2$$

Solución:

$$|C|=\left|(2A^tB^{-1})^2\right|=\left|2A^tB^{-1}\right|^2=(|2A^t||B^{-1}|)^2=\left(2^3|A|\frac{1}{|B|}\right)^2=\left(2^3\frac{|A|}{|A|}\right)^2=\left(2^3\right)^2=2^6=64$$

0.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 0.17.3 Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\left\{\begin{array}{l} (a^2-2)x+2y+z=a+2\\ (a^2-2)x+4y+(a+1)z=a+6\\ (a^2-2)x+2y+(2-a)z=a+\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a^2-2 & 2 & 1 & a+2\\ a^2-2 & 4 & a+1 & a+6\\ a^2-2 & 2 & 2-a & a+\sqrt{2}\end{array}\right);\quad |A|=2(1-a)(a^2-2)=0\Longrightarrow a=1,\;\; a=\pm\sqrt{2}$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 0$ y $a \neq \pm\sqrt{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = $ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a^2-2 & 2 & 1 & a+2 \\ a^2-2 & 4 & a+1 & a+6 \\ a^2-2 & 2 & 2-a & a+\sqrt{2} \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} a^2-2 & 2 & 1 & a+2 \\ 0 & 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 1-a & -2+\sqrt{2} \end{array} \right)$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{a+\sqrt{2}} \\ \\ y = \dfrac{a(2+\sqrt{2})-4}{2(a-1)} \\ \\ z = \dfrac{2-\sqrt{2}}{a-1} \end{array} \right.$$

- Si $a = \sqrt{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & \sqrt{2}+2 \\ 0 & 4 & \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+6 \\ 0 & 2 & 2-\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2+\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & 2-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2} & -2+2\sqrt{2} \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2+\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & 2-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y + z = 2+\sqrt{2} \\ (\sqrt{2}-1)z = 2-\sqrt{2} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = \sqrt{2} \end{array} \right.$$

- Si $a = -\sqrt{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -\sqrt{2}+2 \\ 0 & 4 & -\sqrt{2}+1 & -\sqrt{2}+6 \\ 0 & 2 & 2+\sqrt{2} & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -\sqrt{2}+2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 2+\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2}+1 & -2+\sqrt{2} \end{array} \right)$$

$$= \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -\sqrt{2}+2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 2+\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 1 & 1+\sqrt{2} \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

Problema 0.17.4 Sabiendo que la inversa de una matriz A es $\left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right)$ y la inversa de la matriz $AB = \left(\begin{array}{cc} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right)$ determina la matriz B.

Solución:

Sea $C=(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}\Longrightarrow CA=B^{-1}A^{-1}A\Longrightarrow CA=B^{-1}\Longrightarrow B=\left(B^{-1}\right)^{-1}=(CA)^{-1}=A^{-1}C^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -4\\ 1 & 5\end{pmatrix}$

0.18. País Vasco

0.18.1. Modelo de 2020

Problema 0.18.1 Discutir, en función de m, el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} (m+3)x+my+mz=m-1\\ 3x+mz=m-2\\ -y+z=m-3\end{array}\right.$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.
Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} m+3 & m & m & m-1\\ 3 & 0 & m & m-2\\ 0 & -1 & 1 & m-3\end{array}\right);\quad |A|=m(m-3)=0\Longrightarrow m=0,\ \ m=3$$

- Si $m\neq 0$ y $m\neq 3\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $m=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -1\\ 3 & 0 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 1 & -3\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -3\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema incompatible

- Si $m=3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 2F_2-F_1\\ F_3\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 2\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 3F_3-F_2\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 2\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Si $m=3$: (sistema compatible indeterminado)

$$\left\{\begin{array}{l} 6x+3y+3z=2\\ 3x+3z=1\\ -y+z=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3}-\lambda\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 0.18.2 Dada la matriz $A(a)$

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular, razonadamente, el valor de a para que el determinante de $A(a)^2$ valga 4.

Solución:

$$|A(a)^2| = |A(a)|^2 = a^2 = 4 \Longrightarrow a = \pm 2$$

0.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 0.18.3 Discutir el sistema $S(a)$ en función de a, siendo

$$S(a) = \begin{cases} ax - y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \\ x + 2y + az = 3 \end{cases}$$

Resolver en función de a, mediante el método de Cramer, en los casos en que sea posible.
Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 3 \end{array} \right); \quad |A| = -2a^2 + 3a + 9 = 0 \Longrightarrow a = 3, \ \ a = -\frac{3}{2}$$

- Si $a \neq 3$ y $a \neq -3/2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{23 - 3a}{-2a^2 + 3a + 9} = \frac{3a - 23}{2a^2 - 3a - 9}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^2 + a + 2}{-2a^2 + 3a + 9} = -\frac{a^2 + a + 2}{2a^2 - 3a - 9}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10 - 8a}{-2a^2 + 3a + 9} = -\frac{2(4a - 5)}{2a^2 - 3a - 9}$$

- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 3F_2 - F_1 \\ 3F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 + 7F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a=-3/2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -3/2 & -1 & 2 & 2\\ 1 & -2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -3/2 & 3\end{array}\right)=\frac{3}{2}\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -2 & 4 & 4\\ 2 & -4 & -2 & 2\\ 2 & 4 & -3 & 4\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 3F_2+2F_1\\ 3F_3+2F_1\end{array}\right]=$$

$$\frac{3}{2}\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -2 & 4 & 4\\ 0 & -16 & 2 & 14\\ 0 & 8 & -1 & 20\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 2F_3+F_2\end{array}\right]=\frac{3}{2}\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -2 & 4 & 4\\ 0 & -16 & 2 & 14\\ 0 & 0 & 0 & 54\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema incompatible

Problema 0.18.4 Sea $M(\alpha)$ la matriz dada por $M(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1\\ \alpha & 1 & \alpha\\ 0 & \alpha & 1\end{pmatrix}$

a) Determinar para que valores de α la matriz no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa para $\alpha=0$, y en caso de que no sea posible razonar por que no es posible.

Solución:

a) $|M(\alpha)|=1-\alpha^2=0\Longrightarrow \alpha=\pm 1$ para estos valores no existe la inversa de $M(\alpha)$.

$$\nexists M(\alpha)^{-1}\ \ \forall\alpha\in\{-1,1\}$$

$$\exists M(\alpha)^{-1}\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$$

b) Si $\alpha=0\Longrightarrow M(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow M(0)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

0.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 0.18.5 Discutir, en función de A, el sistema que sigue y resolver cuando sea posible:

$$S=\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2A\\ 2x+3y+4z=2\\ 4x+4y+Az=4A\end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{S}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2A\\ 2 & 3 & 4 & 2\\ 4 & 4 & A & 4A\end{array}\right);\ \ |S|=A-4=0\Longrightarrow A=4$$

- Si $A\neq 4\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2A & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4A & 4 & A\end{vmatrix}}{|S|}=\frac{2(3A^2-15A+4)}{A-4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2A & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4A & A \end{vmatrix}}{|S|} = -\frac{2(2A^2 - 13A + 4)}{A - 4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2A \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4A \end{vmatrix}}{|S|} = -\frac{4A}{A - 4}$$

- Si $A = 4$:

$$\overline{S} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 16 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{array}\right) =$$

$$\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Problema 0.18.6 Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular razonadamente M^{2020}

Solución:

$$M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^3 M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{2020} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2020 & 1 \end{pmatrix}$