Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Julio 2020) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{r} x+ay=0\\ x+2z=0\\ x+ay+(a+1)z=a \end{array}\right.$$

Se pide:

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema para $a=0$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & a & a+1 & a \end{array}\right)$; $|A|=-a(a+1)=0 \Longrightarrow a=0$ y $a=-1$.

- Si $a\in\mathbb{R}-\{0,-1\}\Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(A)=$ n° de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD: Sistema compatible determinado, solución única.
- Si $a=-1$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\Longrightarrow$$
SI: sistema incompatible, no tiene solución.
- Si $a=0$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)=$$
$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 2F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$$ SCI: sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b) Si $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x=0\\ 2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=\lambda\\ z=0 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4$$

a) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x = 0$ para que la función anterior sea continua en este punto.

b) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

Solución:

a) $3x + x^2 = x(3 + x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -3 \Longrightarrow$
$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, 0\}$.

En $x = 0$:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 = \left[\frac{0}{0}\right] + 4 = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{4 - 3x^2}{3 + 2x} + 4 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3} \Longrightarrow$$

La función f presenta en el punto $x = 0$ una discontinuidad evitable (un agujero) La extensión por continuidad que necesita esta función para ser continua en ese punto sería hacer $f(0) = \dfrac{16}{3}$.

b) **Asíntotas**:

- **Verticales**: En $x = 0$ no hay asíntota por el apartado anterior. Analizamos en $x = -3$:

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = \left[\frac{-5}{0^-}\right] + 4 = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = \left[\frac{-5}{0^+}\right] + 4 = -\infty$$

- **Horizontales**: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{4 - x^2}{3 + x} + 4 = -\infty$$

- **Oblicuas**: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-x^2 + 4x + 16}{x^2 + 3x} = -1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{7x + 16}{x + 3} = 7$$

$$y = -x + 7$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.

b) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x > 0$.

Solución:

a) $b = f(-1) = 0$. $f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x \Longrightarrow m = f'(-1) = 3$ Luego la ecuación de la recta tangente será:

$$y = 3(x + 1) \Longrightarrow y = 3x + 3$$

b) $-x^4 + x^3 + 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$. Como $x \geq 0$ el intervalo de integración será el $[0, 2]$.

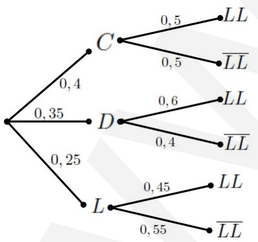
$$S = \int_0^2 (-x^4 + x^3 + 2x^2) = \left.\frac{-x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{44}{15}\ u^2$$

Problema 4 *(2 puntos)* Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40 % de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35 % a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0,5, 0,6 y 0,45, respectivamente. Elegido un socio al azar:

a) Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.

b) Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

Solución:



Sea C ir al río Cuervo, D ir a las Hoces del Duratón, L ir al Cañón del rio Lobo, LL llueve y $\overline{LL}$ no llueve.

a) $P(\overline{LL}) = P(\overline{LL}|C)P(C) + P(\overline{LL}|D)P(D) + P(\overline{LL}|L)P(L) = 0,5 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,35 + 0,55 \cdot 0,25 = 0,4775$

b) $P(C|LL) = \dfrac{P(LL|C)P(C)}{P(LL)} = \dfrac{0,5 \cdot 0,4}{1 - 0,4775} = 0,38277$

Problema 5 *(2 puntos)* La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0,5 km.

a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.

b) Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

Solución:

$$N(\mu; 0,5)$$

a) $z_{\alpha/2} = 2$ y $E = 0,05$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\frac{0,5}{\sqrt{n}} = 0,05 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2 \cdot 0,5}{0,05}\right)^2 = 400$$

Luego $n = 400$.

b) Tenemos $N(2; 0,5)$, $n = 16$ y $\overline{X} = \frac{30}{16} = 1,875$

$$P(\overline{X} \geq 1,875) = P\left(Z \geq \frac{1,875}{0,5/\sqrt{16}}\right) = P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) = 0,8413$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Julio 2020) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera la matriz A dada por $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.

b) Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 - 5A = -4I$:

$$\begin{pmatrix} 11 & m+1 & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 \\ 0 & 5m & 0 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & m-4 & 10 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 5 & 4-m & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} m-4=0 \\ m^2-5m=-4 \\ 4-m=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow m = 4$$

b) Si $m = 1$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 4 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2 puntos)* La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3,\ \ 0 \leq y \leq 15,\ \ y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0,\ \ y - x \leq 10,\ \ y + 20 \geq 2x$$

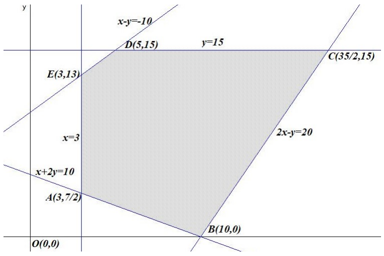
a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x+y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

Solución:

a) La región factible S es:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0 \\ y - x \leq 10 \\ y + 20 \geq 2x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ x + 2y \geq 10 \\ x - y \geq -10 \\ 2x - y \leq 20 \end{cases}$$



Los vértices son: $A\left(3,\dfrac{7}{2}\right)$, $B(10,0)$, $C\left(\dfrac{35}{2},15\right)$, $D(5,15)$ y $E(3,13)$.

b) La función objetivo $f(x,y)=x+y$ sobre los vértices da los siguientes resultados:

$$\begin{cases} f\left(3,\dfrac{7}{2}\right)=6,5 \Longleftarrow \text{ Mínimo} \\ f(10,0)=10 \\ f\left(\dfrac{35}{2},15\right)=32,5 \Longleftarrow \text{ Máximo} \\ f(5,15)=20 \\ f(3,13)=16 \end{cases}$$

El máximo se encuentra en el punto $C\left(\dfrac{35}{2},15\right)$ con un valor de 32,5 y el mínimo en el punto $A\left(3,\dfrac{7}{2}\right)$ con un valor de 6,5.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x)=3(x+k)e^{-\frac{x}{2}}$$

a) Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x=1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.

b) Para $k=1$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

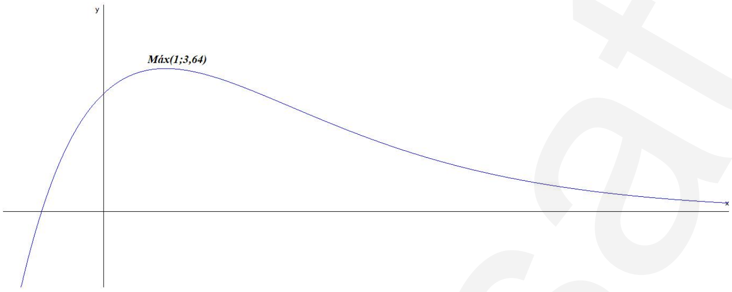
a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

$f'(x)=-\dfrac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}(x+k-2)$ y $f'(1)=0\Longrightarrow \dfrac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}(1-k)=0\Longrightarrow k=1$

b) Si $k=1 \Longrightarrow f(x)=3(x+1)e^{-\frac{x}{2}} \Longrightarrow f'(x)=\frac{3}{2}e^{-\frac{x}{2}}(1-x)=0 \Longrightarrow$ $x=1$

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,1)$, y decreciente en el intervalo $(1,\infty)$ con un máximo en $\left(1,\frac{6}{\sqrt{e}}\right)=(1;3,64)$.



Problema 4 *(2 puntos)* Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplía esta por dos años más. El 40 % de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.

a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el período de garantía.

b) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

Solución:
Sean los sucesos M se estropea el microondas, H se estropea el horno y F conserva la factura.
$P(M)=0,02$, $P(H)=0,05$. Como M y H son independientes $P(M\cap H)=P(M)P(H)=0,02\cdot 0,05=0,001$. También tenemos $P(\overline{F}|M)=0,4$.

a) $P(M\cup H)=P(M)+P(H)-P(M\cap H)=0,02+0,05-0,001=0,069$.

b) $P(\overline{F}|M)=\dfrac{P(\overline{F}\cap M)}{P(M)} \Longrightarrow P(\overline{F}\cap M)=P(M)\cdot P(\overline{F}|M)=0,02\cdot 0,4=0,008$.

$P(\overline{F} \cap M) = P(M) - P(F \cap M) \Longrightarrow P(F \cap M) = P(M) - P(\overline{F} \cap M) = 0,02 - 0,008 = 0,012.$

Problema 5 *(2 puntos)* Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes:

$$40 \quad 45 \quad 38 \quad 44 \quad 41 \quad 40 \quad 35 \quad 50 \quad 40 \quad 37$$

Construya el intervalo de confianza al 90 % para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.

b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 7)$$

a) $n = 10$, $\overline{X} = 41$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{7}{\sqrt{10}} = 3,64136$$

$$IC = \left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (37,36; 44,64)$$

b) $n = 64$ y $L = 2E = 5 \Longrightarrow E = 2,5$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2,5 = z_{\alpha/2}\frac{7}{\sqrt{64}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2,5 \cdot 8}{7} = 2,8571$$

$$P(Z \le 2,86) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9979 \Longrightarrow \alpha = 0,0042 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,9958$$

$$NC = 99,58\,\%$$