Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Mayo 2020

Problema 1 Dada la función: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.

b) Las asíntotas.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

d) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

e) Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Solución:

a) Dominio de f: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow$ No hay.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -\frac{1}{4} \Longrightarrow (0, -1/4)$.

b) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left[\frac{5}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left[\frac{5}{0^+}\right] = +\infty$$

$x = -2$

$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left[\frac{5}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \left[\frac{5}{0^-}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

c) $f'(x) = -\dfrac{10x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

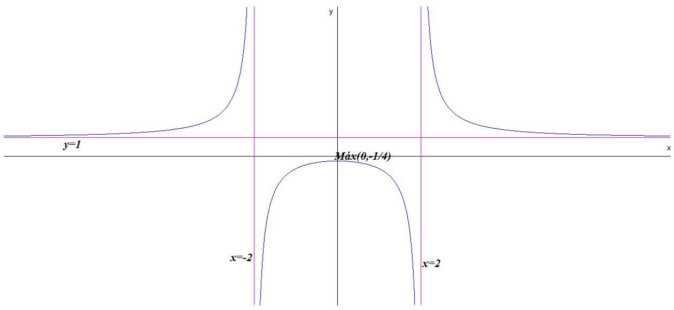
La función es decreciente en el intervalo $(0, 2) \cup (2, \infty)$, y creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$, tiene un máximo en el punto $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$.

d) $f''(x) = \dfrac{10(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \neq 0 \Longrightarrow$ No hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2 + \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava$\cup$	convexa$\cap$	cóncava$\cup$

Cóncava: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ y Convexa: $(-2, 2)$.

e) Representación:



Problema 2 Dada la función, determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = -2$ y en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} -6x+3 & \text{si } -4 < x < -2 \\ x^2+ax+5 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ \frac{x+15}{x+b} & \text{si } 0 \le x < 3 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -2$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2^-} (-6x+3) = 15 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -2^+} (x^2+ax+5) = 9-2a \end{array}\right. \Longrightarrow 15 = 9-2a \Longrightarrow a = -3$$

Continuidad en $x = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} (x^2+ax+5) = 5 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{x+15}{x+b} = \dfrac{15}{b} \end{array}\right. \Longrightarrow 5 = \frac{15}{b} \Longrightarrow b = 3$$

Problema 3 Un estudio basado en los datos censales sobre la evolución de la población en una ciudad española revela que, en el período 2005-2015, el número de habitantes (en miles) sigue la función

$$p(t) = (t-2)^2(1-2t) + 252t + 116$$

donde t indica el tiempo medido en años, siendo $t = 0$ el tiempo correspondiente al año 2005. Tomando $p(t)$, determina los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de habitantes de dicha ciudad. ¿En qué momento del tiempo el número de habitantes es máximo? ¿Qué número de habitantes tiene la ciudad en ese momento?

Solución:

$$p(t) = (t-2)^2(1-2t) + 252t + 116 = -2t^3 + 9t^2 + 240t + 120$$

$$p'(t) = -6t^2 + 18t + 240 = 0 \Longrightarrow t = 8, \ \ t = -5 (\text{no vale})$$

	$[0,8)$	$(8,+\infty)$
$p'(t)$	$+$	$-$
$p(t)$	creciente	decreciente

La población crece en el intervalo $[0,8)$, es decir, desde el 2005 hasta el 2013, y decrece en el intervalo $(8,\infty)$, es decir, desde el año 2013 hasta la actualidad. Por tanto, la mayor población se encuentra el año 2013 (Máximo en $t = 8$) con $p(8) \cdot 1000 = 1592000$ habitantes.

Problema 4 La función real de variable real, $f(x)$, se define según la siguiente expresión:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} e^x + k & \text{si} & x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si} & 0 < x \leq 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si} & x > 3 \end{array}\right.$$

a) Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores de k.

b) Considerando $k = 0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}(e^x + k) = 1 + k \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}(1 - x^2) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow 1 + k = 1 \Longrightarrow k = 0$$

Si $k \neq 0$ la función es discontinua en $x = 0$.
Continuidad en $x = 3$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-}(1 - x^2) = -8 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+}\dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{array}\right. \Longrightarrow$$

En $x = 3$ la función es siempre discontinua, en resumen: Si $k = 0$ f es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$. Si $k \neq 0$ f es continua en $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

b) Con $k = 0$:

$$S_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} e^x\,dx = e^x\Big]_{-1}^{0} = 1 - e^{-1}$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} (1 - x^2)\,dx = x - \frac{x^3}{3}\Big]_{0}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 - e^{-1} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} - \frac{1}{e} \simeq 1,3\ u^2$$