Problemas de Matemáticas II Aplicadas a las Ciencias Sociales Estadística (PAU 2018-2019)

Isaac Musat Hervás

3 de febrero de 2020

Índice

Teoría

Gráficos:

- Varable discreta: con diagrama de barras.

$$x_i,\ \ p(x_i) = p_i,\ \ \sum p_i = 1$$

$$\text{Media} = \mu = \sum x_i p_i,\ \ \text{Varianza} = \sigma^2 = \sum p_i(x_i-\mu)^2 = \sum p_i x_i - \mu^2$$

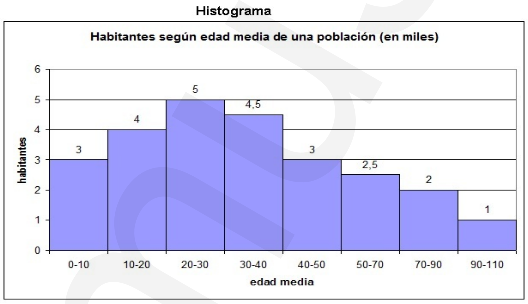
$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

- Variable continua: histogramas (intervalos)

$$x_i,\ \ f_i,$$

$$\text{Media} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum x_i},\ \ \text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i(x_i-\overline{X})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \overline{X}^2$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$



Distribución Binomial B(n,p):

$$P(X=a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}$$

p es la probabilidad de éxito y $q = 1-p$ la probabilidad de fracaso. Por ejemplo, si B$(7, 0,4) \Longrightarrow$ $n = 7$, $p = 0,4$ y $q = 0,6$:

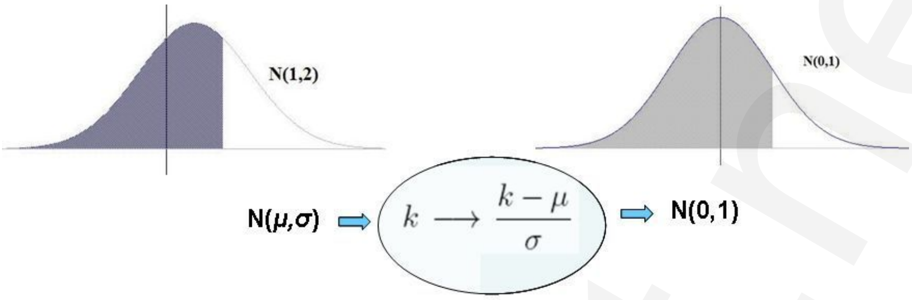
$$P(X=2) = \binom{7}{2} 0,4^2 0,6^5 = 0,261$$

$$P(X \le 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3),\ \text{ó}$$

$$P(X \le 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7))$$

Su Media$= \mu = np$, su Varianza$= \sigma^2 = npq$ y su Desviación Típica$= \sqrt{\text{Varianza}}$.
Distribución Normal N(μ,σ):

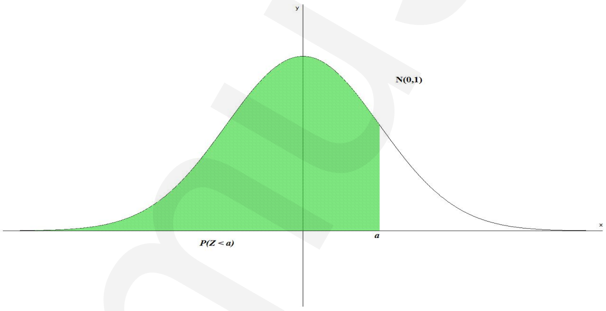
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Tipificación Paso de una normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ a otra $\mathrm{N}(0,1)$: $k \longrightarrow \dfrac{k-\mu}{\sigma}$, si queremos calcular $P(a < X < b)$ y X es de una normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ entoces Z seguirá una normal $\mathrm{N}(0,1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Cuando una distribución binmial $B(n,p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.



$$P(Z > a) = 1 - P(Z < a), \quad P(Z < -a) = 1 - P(Z < a)$$
$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$$

La corrección por continuidad de Yate seguirá las siguientes reglas:
$P(x = a) = P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$
$P(X \leq a) = P(X \leq a + 0,5)$
$P(X < a) = P(X \leq a - 0,5)$
$P(X > a) = P(X \geq a + 0,5)$
$P(X \geq a) = P(X \geq a - 0,5)$
Cálculo de $z_{\alpha/2}$ con un **Nivel de confianza** del 95 %: $NC = 0,95 = 1 - \alpha$ ($\alpha =$**Nivel de significación**)$\Longrightarrow$ $\alpha = 0,05$. Para una distribución bilateral tendremos $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$ se busca en la tabla $N(0,1)$ y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$
Para muestras aleatorias de tamaño n con media $\overline{X}$ de una $N(\mu, \sigma)$ la media $\overline{X}$ se distribuye como una normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Error: $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\overline{X}-E,\overline{X}+E)=\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de medias.

Proporciones: Sea $\hat{p}$ proporción de la muestra de tamaño n, se distribuye como una $N\left(p,\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$

Error: $E=z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\hat{p}-E,\hat{p}+E)=\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de proporciones.

Problemas

1. Aragón

1.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.1 Se va a realizar un estudio de mercado para estimar la proporción de consumidores que conoce una determinada marca de yogures. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple de consumidores, se va a preguntar a cada uno si conoce la marca y a partir de los resultados se construirá el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 91 %.

a) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,08 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?

b) Decidimos tomar una muestra de tamaño de 175 consumidores; les preguntamos y un total de 126 responden que conocen la marca. Calcular el intervalo de confianza al 91 % para la proporción de consumidores que conocen la marca.

Solución:

a) $NC = 0,91 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,09 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,045$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,045 = 0,955 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,695$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow 0,04 = 1,695\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,695 \cdot 0,5}{0,08}\right)^2 = 448,91 \Longrightarrow$$

$$n = 449$$

b) $n = 175$ y $\hat{p} = \dfrac{126}{175} = 0,72$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,695\sqrt{\frac{0,72 \cdot 0,28}{175}} = 0,0575$$

$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,72-0,0575; 0,72+0,0575) = (0,6625; 0,7775) = (66,25\,\%; 77,75\,\%)$

1.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.2 Se sabe que el peso de las manzanas de un agricultor tiene distribución normal con desviación típica igual a 20 g. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del peso de las manzanas del agricultor.

a) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 93 % tenga una amplitud menor o igual que 8 g.

b) Decidimos tomar una muestra de tamaño 12. Pesamos las manzanas y obtenemos los siguientes resultados (en gramos)

178, 221, 196, 231, 210, 168, 203, 186, 196, 214, 230, 224

Calcular un intervalo de confianza al 93 % para la media del peso de las manzanas del agricultor.

Solución:

$$N(\mu; 20)$$

a) $NC = 0,93 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,07 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,035$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,035 = 0,965 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,815$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 4 = 1,815\frac{20}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,815 \cdot 20}{4}\right)^2 = 82,36 \Longrightarrow n = 83$$

b) $n = 12$ y $\overline{X} = 204,75$:

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,815\frac{20}{\sqrt{12}} = 10,479$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (204,75 - 10,479; 204,75 + 10,479) = (194,271; 215,229)$$

2. Asturias

2.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.1 Se supone que el tiempo de cada consulta en un determinado centro de salud sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 1,5 minutos.

a) Para estimar dicho tiempo medio por consulta, se considera una muestra aleatoria de 961 consultas, las cuales han tenido una duración media de 6 minutos. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media de las consultas en ese centro de salud, al 95 % de confianza.

b) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media por consulta a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,2 minutos y un nivel de confianza del 95 %?

Solución:

$$N(\mu; 1,5)$$

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$n = 961$ y $\overline{X} = 6$:

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{1,5}{\sqrt{961}} = 0,09484$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (6 - 0,09484; 6 + 0,09484) = (5,90516; 6,09484)$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,2 = 1,96\frac{1,5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 1,5}{0,2}\right)^2 = 216,09 \Longrightarrow n = 217$$

Problema 2.2 Para hacer un estudio sobre el uso de las nuevas tecnologías (NT) por parte de los adolescentes, se tomó una muestra aleatoria de 100 adolescentes, de los cuales 10 respondieron que las usaban 4 horas a la semana, 15 que las usaban 5 horas por semana, 20 que las usaban 7 horas por semana y otros 20 que las usaban 8 horas por semana, 15 adolescentes dijeron que las usaban 9 horas a la semana, 10 que las usaban 10 horas y otros 10 que las usaban 15 horas. Su supone además que el tiempo que dedican semanalmente a las nuevas tecnologías los adolescentes sigue una distribución normal con desviación típica 1,7 horas.

a) Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el tiempo medio semanal dedicado a las NT por los adolescentes, al 90 % de confianza.

b) Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de adolescentes que usan las nuevas tecnologías más de 6 horas a la semana, al 90 % de confianza.

Solución:

$$N(\mu; 1,7)$$

a) $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,64$

$n = 100$ y $\overline{X} = 8$:

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,64\frac{1,7}{\sqrt{100}} = 0,2788$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (8 - 0,2788; 8 + 0,2788) = (7,7212; 8,2788)$$

b) $\hat{p} = P(\{\text{más de 6 horas}\}) = \dfrac{75}{100} = 0,75$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow E = 1,64\sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{100}} = 0,071$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,75 - 0,071; 0,75 + 0,071) = (0,679; 0,821) = (67,9\,\%; 82,1\,\%)$$

2.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.3 Calcular

a) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de turistas asiáticos en Asturias a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 95 %?

b) En una muestra aleatoria de 800 turistas que visitan Asturias se obtuvo que solo 80 de ellos son asiáticos. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de turistas asiáticos en Asturias.

Solución:

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow 0,05 = 1,96\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 0,5}{0,05}\right)^2 = 384{,}16 \Longrightarrow$$

$$n = 385$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow E = 1,96\sqrt{\frac{0,1\cdot 0,9}{800}} = 0,0208$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,1 - 0,0208; 0,1 + 0,0208) = (0,0792; 0,1208) = (7,92\,\%; 12,08\,\%)$$

Problema 2.4 Con el objetivo de estudiar los ingresos anuales de los ejecutivos de multinacionales, se seleccionó una muestra aleatoria de 576 ejecutivos, cuyos ingresos totales (suma de los ingresos de los 576 ejecutivos) el último año ascendieron a 28,8 millones de euros. Se supone además que los ingresos anuales de este tipo de ejecutivos sigue una distribución normal con desviación típica 3000 euros.

a) Construye un intervalo de confianza para los ingresos medios anuales de este colectivo, al 99 % de confianza.

b) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar los verdaderos ingresos medios anuales a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 500 euros y un nivel de confianza del 99 %?

Solución:

$$N(\mu; 3000)$$

a) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,58$

$n = 576$ y $\overline{X} = 50000$:

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,58\frac{3000}{\sqrt{576}} = 322,5$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (50000 - 322,5; 50000 + 322,5) = (49677,5; 50322,5)$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 500 = 2,58\frac{3000}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{2,58\cdot 3000}{500}\right)^2 = 239,6304 \Longrightarrow$$

$$n = 340$$

3. Islas Baleares

3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.1 Resolver los siguientes apartados:

a) El peso de los habitantes de una ciudad tiene una media de 67 kg y una desviación típica de 5 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que la media del peso de 100 personas supere los 68,5 kg? ¿Y que sea menor que 68 kg ?.

b) En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes, para estimar la temperatura media de los enfermos. La media de la muestra ha sido de 37,1 C, y la desviación típica de la población es de 1,04 C. Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza es del 99 %. Interpreta el resultado en el entorno del problema.

Solución:

a) $N(67;5)$ y $n=100 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu;\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(67;0,5)$

$P(\overline{X} \geq 68,5) = P\left(Z > \dfrac{68,5-67}{0,5}\right) = P(Z>3) = 1-P(Z<3) = 1-0,9987 = 0,0013$

$P(\overline{X} \leq 68) = P\left(Z < \dfrac{68-67}{0,5}\right) = P(Z<2) = 0,9772$

b) $n=64$, $\overline{X}=37,1$, $\sigma=1,04$ y $NC=0,99$:
$\alpha = 1-0,99 = 0,01 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \Longrightarrow P(Z<Z_{\alpha/2}) = 1-\frac{\alpha}{2} = 1-0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,58$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,58\frac{1,04}{\sqrt{64}} = 0,3354$$

$$IC = (\overline{X}-E,\overline{X}+E) = (37,1-0,3354;37,1+0,3354) = (36,76;37,44)$$

3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.2 El 70 % de los alumnos de bachillerato tienen móvil.

a) Si un centro tiene 1.400 alumnos de bachillerato, ¿cuántos se espera que tengan móvil?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra aleatoria con repetición de 150 alumnos de bachillerato, haya más de 100 con teléfono móvil?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra aleatoria con repetición de 200 alumnos de bachillerato, haya 140 o menos con teléfono móvil?

Solución:

$$B(n;0,7)$$

a) $np = 1400 \cdot 0,7 = 980$ alumnos

b) $B(150;0,7)$ tenemos $n>10$, $np=105>5$ y $nq=45>5 \Longrightarrow B(150;0,7)$ se comporta como $N(nq,\sqrt{npq}) = N(105;5,61)$

$P(X>100) = P\left(Z > \dfrac{100,5-105}{5,61}\right) = P(Z>-0,8) = 1-P(Z<-0,8) = 1-(1-P(Z<0,8)) = 0,7881$

c) $B(200;0,7)$ tenemos $n>10$, $np=140>5$ y $nq=60>5 \Longrightarrow B(200;0,7)$ se comporta como $N(nq,\sqrt{npq}) = N(140;6,481)$

$P(X \leq 140) = P\left(Z < \dfrac{140,5-140}{6,481}\right) = P(Z<0,08) = 0,5319$

4. Islas Canarias

4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.1 A partir de una muestra de 225 parados, se estima que un intervalo de confianza para la prestación social media que reciben está entre 407,72 y 442,28 euros (ambos incluidos). Suponiendo hipótesis de normalidad, con una desviación típica de 90 euros:

a) ¿Cuál es la media muestral obtenida?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Usando la estimación puntual de la prestación social media obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de la prestación social de 25 parados sea mayor o igual que 430 euros?

Solución:

a) $n = 225$ e $IC = [407,72; 442,28] = [\overline{X} - E; \overline{X} + E] \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{X} - E = 407,72 \\ \overline{X} + E = 442,28 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{X} = 425 \\ E = 17,28 \end{array}\right.$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 17,28 = Z_{\alpha/2}\frac{90}{\sqrt{225}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,88$$

$$P(Z < 2,88) = 0,998 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,004 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,996 = 99,6\,\%$$

c) Estamos en una $N(425; 90)$ y sacamos una muestra $n = 25 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(425; \frac{90}{\sqrt{25}}\right) = N\,(425; 18)$:

$$P(\overline{X} \geq 430) = P\left(Z > \frac{430 - 425}{18}\right) = P(Z > 0,28) = 1 - P(Z < 0,28) = 0,3897$$

Problema 4.2 Se desea estimar la proporción p de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos de tamaño n.

a) A partir de estudios realizados en poblaciones similares, se cree que el porcentaje de daltónicos en esta población está en torno al 30 %. Utilizando este valor, calcular el tamaño de la muestra para que, con un nivel de confianza del 0,95, el error cometido en la estimación de p sea inferior al 3,1 %.

b) Finalmente se toma una muestra de 64 individuos, en la que se observa un 35 % de individuos daltónicos. Determinar, usando un nivel de confianza del 99 %, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de daltónicos de la población.

Solución:

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow 0,031 = 1,96\sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96}{0,031}\right)^2 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 839,48 \Longrightarrow$$

$$n = 840$$

b) $n = 64$, $\hat{p} = 0,35$ y $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,58$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 2,58\sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{64}} = 0,1538$$

$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,35-0,1538; 0,35+0,1538) = (0,1962; 0,5038) = (19,62\,\%; 50,38\,\%)$

Problema 4.3 En cierta región, el peso de los jóvenes que sufren diabetes tipo 2 sigue una distribución normal de media 89 kilogramos y desviación típica igual a 20 kilogramos. Determinar:

a) El porcentaje de jóvenes de esa región, con diabetes tipo 2 que pesa entre 86 y 100 kilogramos.

b) La probabilidad de que el peso medio de un grupo de 25 jóvenes de esa región, con diabetes tipo 2, sea superior a 90 kilogramos.

Solución:

$$N(89; 20)$$

a) $P(86 \le X \le 100) = P\left(\frac{86-89}{20} < Z < \frac{100-89}{20}\right) = P(-0,15 < Z < 0,55) = P(Z < 0,55) - P(Z < -0,15) = P(Z < 0,55) - (1 - P(Z < 0,15)) = 0,7088 - (1 - 0,5596) = 0,2684 \Longrightarrow 26,84\,\%$

b) $n = 25 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(89; \frac{20}{\sqrt{25}}\right) = N\,(89; 4)$.

$$P(\overline{X} \ge 90) = P\left(Z > \frac{90-89}{4}\right) = P(Z > 0,25) = 1 - P(Z < 0,25) = 1 - 0,5987 = 0,4013$$

4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.4 Un estudio sobre la proporción de habitantes mayores de 60 años, sin dispositivos móviles, de una determinada ciudad, ha dado el intervalo de confianza $[0,1804, 0,2196]$, con un nivel de confianza del 95 %. Suponiendo que dicha proporción se puede aproximar por una distribución normal:

a) ¿Cuál es la proporción muestral de habitantes sin dispositivos móviles?

b) ¿Cuál es el tamaño de la muestra utilizado?

c) Con un nivel de confianza del 99 % y con la misma información muestral, ¿cuál sería el correspondiente intervalo?

Solución:

a) $IC = [0,1804, 0,2196] = [\hat{p} - E; \hat{p} + E] \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{p} - E = 0,1804 \\ \hat{p} + E = 0,2196 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{p} = 0,2 \\ E = 0,0196 \end{array}\right.$$

b) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow 0,0196 = 1,96\sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{n}} \Longrightarrow n = 1600$$

c) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,58$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow E = 2,58\sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{1600}} = 0,0258$$

$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,2 - 0,0258; 0,2 + 0,0258) = (0,1742; 0,2258) = (17,42\,\%; 22,58\,\%)$

Problema 4.5 Debido a la problemática de tráfico por las mañanas en el acceso a las grandes ciudades, una empresa quiere estudiar el tiempo empleado en llegar al puesto de trabajo de sus trabajadores. Para una muestra de 100 empleados, se ha obtenido un tiempo medio de 40 minutos. Si la variable sigue una distribución normal cuya desviación típica es de 12 minutos.

a) Determinar el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza del 88 %

b) ¿Qué tamaño muestral se necesita para estimar el tiempo en llegar al trabajo, con un error de 4 minutos y con un nivel de confianza del 95 %?

Solución:

$$N(\mu; 12)$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = 40$ y $NC = 0,88 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,12 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,06$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,06 = 0,94 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,555$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,555\frac{12}{\sqrt{100}} = 1,866$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (40 - 1,866; 40 + 1,866) = (38,134; 41,866)$$

b) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 4 = 1,96\frac{12}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 34,5744 \Longrightarrow n = 35$$

Problema 4.6 En una empresa hay 250 empleados. Su edad sigue una distribución normal de media 44 años y de desviación típica 18 años.

a) ¿Cuántos empleados se espera que haya con más de 62 años?

b) ¿Cuántos empleados se espera que haya con menos de 40 años?

c) Halla el número de empleados que podría conseguir el carnet joven de transporte que promociona el Ayuntamiento si el requisito es ser mayor de edad y no haber cumplido los 30 años.

Solución:

$$N(44; 18)$$

a) $P(X \geq 62) = P\left(Z > \dfrac{62-44}{18}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$

$$250 \cdot P(X \geq 62) = 250 \cdot 0,1587 = 39,675$$

Entre 39 y 40 trabajadores, se estima, que tienen más de 62 años.

b) $P(X \leq 40) = P\left(Z < \dfrac{40-44}{18}\right) = P(Z < -0,22) = 1 - P(Z < 0,22) = 1 - 0,5871 = 0,4129$

$$250 \cdot P(X \leq 40) = 250 \cdot 0,4129 = 103,225$$

Entre 103 y 104 trabajadores, se estima, que tienen menos de 40 años.

c) $P(18 \leq X \leq 30) = P\left(\dfrac{18-44}{18} < Z < \dfrac{30-44}{18}\right) = P(-1,44 < Z < -0,78) = P(Z < -0,78) - P(Z < -1,44) = 1 - P(Z < 0,78) - (1 - P(Z < 1,44)) = P(Z < 1,44) - P(Z < 0,78) = 0,9251 - 0,7823 = 0,1428$

$$250 \cdot P(18 \leq X \leq 30) = 250 \cdot 0,1428 = 35,7$$

Entre 35 y 36 trabajadores, se estima, que podrían conseguir el carnet joven de transporte.

5. Cantabria

5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.1 El gasto mensual en alquiler de los inquilinos de la zona centro de determinada ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica 73 euros. Una muestra aleatoria de 350 inquilinos da como resultado una renta media de 689,3 euros.

a) Obtener el intervalo de confianza del 93 % para la renta media.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 91 % sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

Solución:

$$N(\mu; 73)$$

a) $n = 350$, $\overline{X} = 689,3$ y $NC = 0,93 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,07 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,035$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,035 = 0,965 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,815$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,815\frac{73}{\sqrt{350}} = 7,0822$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (689,3 - 7,0822; 689,3 + 7,0822) = (682,2178; 696,3822)$$

b) $E = \frac{7,0822}{3} = 2,361$ y $NC = 0,91 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,09 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,045$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,045 = 0,955 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,705$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2,361 = 1,705\frac{73}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 2779,089 \Longrightarrow n = 2780$$

5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.2 La edad de los asistentes a un concierto de música clásica celebrado recientemente en la ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica de 3 años. Una muestra aleatoria de 350 espectadores ha dado como resultado una edad media de 64,3 años.

a) Obtener el intervalo de confianza del 92 % para la edad media de los asistentes.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra si deseamos que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea 0,7?

Solución:

$$N(\mu; 3)$$

a) $n = 350$, $\overline{X} = 64,3$ y $NC = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,04 = 0,96 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,755$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,755\frac{3}{\sqrt{350}} = 0,2814$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (64,3 - 0,2814; 64,3 + 0,2814) = (64,0186; 64,5814)$$

b) $E = 0,7$ y $NC = 0,98 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,02 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,01$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,01 = 0,99 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,325$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,7 = 2,325\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 2779,089 \Longrightarrow n \geq 99,287 \Longrightarrow n = 100$$

6. Castilla León

6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 6.1 Las autoridades sanitarias están estudiando los efectos del tabaco en la salud. El tiempo que tarda un fumador en dejar definitivamente de fumar se ajusta a una distribución normal, de media 5 meses y desviación típica 2 meses. Con esta información:

a) Calcula la probabilidad de que un fumador tarde más de 4 meses en dejar definitivamente de fumar?

b) Si se toman 50 fumadores, calcula la probabilidad de que el tiempo medio que tardan los 50 fumadores en dejar definitivamente de fumar sea inferior a 6 meses.

Solución:

$$N(5; 2)$$

a) $P(X \geq 4) = P\left(Z > \frac{4-5}{2}\right) = P(Z > -0,5) = P(Z < 0,5) = 0,6915$

b) $n = 50 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(5; \frac{2}{\sqrt{50}}\right) = N(5; 0,283)$

$$P(\overline{X} \leq 6) = P\left(Z < \frac{6-5}{0,283}\right) = P(z < 3,54) = 0,9998$$

Problema 6.2 En el aeropuerto A, se toma una muestra de 100 días y se observa que en 25 hay saturación aérea. Con esos datos, se calculan dos intervalos de confianza para el parámetro proporción de días con saturación aérea en el aeropuerto A: $[0,122; 0,378]$ y $[0,165; 0,335]$ ¿Cuál es el intervalo de menor confianza? Justifica tu respuesta.

Solución:

- $IC = [0,122; 0,378] = [\hat{p} - E; \hat{p} + E] \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{p} - E = 0,122 \\ \hat{p} + E = 0,378 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{p} = 0,25 \\ E = 0,128 \end{array}\right.$$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,128 = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,25\cdot 0,75}{100}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = z = 2,956$$

$$P(Z < 2,96) = 0,9985 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,003 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,997 = 99,7\,\%$$

- $IC = [0,165; 0,335] = [\overline{X} - E; \overline{X} + E] \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{p} - E = 0,165 \\ \hat{p} + E = 0,335 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{p} = 0,25 \\ E = 0,085 \end{array}\right.$$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,085 = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,25\cdot 0,75}{100}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = z = 1,963$$

$$P(Z < 1,96) = 0,9750 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,95 = 95\,\%$$

- el intervalo $[0,165; 0,335]$ es el de menor confianza.

6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 6.3 Se sabe que el tiempo de resolución de los exámenes propuestos por un profesor universitario sigue una distribución normal de media 74 minutos.

a) Si en el primer examen de este curso la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue 8 minutos, ¿cuál es la probabilidad de haber necesitado para resolver el examen más de los 90 minutos disponibles?

b) En el segundo examen la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue de 9 minutos. Si se presentaron 36 alumnos a este segundo examen, determina la probabilidad de que el tiempo medio de resolución de esos alumnos fuera inferior a 77 minutos.

Solución:

$$N(74;\sigma)$$

a) $N(74; 8)$. $P(X \geq 90) = P\left(Z > \frac{90-74}{8}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

b) $N(74; 9)$ y $n = 36 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(74; \frac{9}{\sqrt{36}}\right) = N(74; 1,5)$

$$P(\overline{X} \leq 77) = P\left(Z < \frac{77-74}{1,5}\right) = P(z < 2) = 0,9772$$

7. Castilla La Mancha

7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2018

Problema 7.1 Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar en frascos de 500 gramos de kétchup en una muestra de 10 frascos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos del kétchup se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:

a) Halla el intervalo de confianza del 97 % para el contenido medio de azúcar en un frasco de 500 gramos de kétchup.

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza.

c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 85 gramos con una probabilidad del 98,5 %? Razona tu respuesta.

Solución:

a) $n = 10$, $\overline{X} = 84$ y $NC = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,17\frac{10}{\sqrt{10}} = 6,86$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (84 - 6,86; 84 + 6,86) = (77,14; 90,86)$$

b) Si se aumenta el tamaño muestral, mientras que la desviación típica y el nivel de confianza permanecen inalterables, el error se hace más pequeño y, en consecuencia, la amplitud del intervalo disminuye.

c) $NC = 0,985 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,015 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0075$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,0075 = 0,9925 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,43$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,43\frac{10}{\sqrt{10}} = 7,68$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (84 - 7,68; 84 + 7,68) = (76,32; 91,68)$$

85 gramos está dentro del intervalo de confianza y se aceptaría que puede ser la media con una confianza del 98,5 %.

Problema 7.2 El tiempo de atención a un paciente por parte de un centro médico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 2$ minutos. Se hace un estudio de los tiempos de atención de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de atención al paciente por parte del centro, con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto?

Solución:

a) $n = 10$, $\overline{X} = 10,3$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{2}{\sqrt{10}} = 1,24$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (10,3 - 1,24; 10,3 + 1,24) = (9,06; 11,54)$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,96\frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 15,37 \Longrightarrow n = 16$$

7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 7.3 El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 2,3$ horas con un nivel de confianza del 95 %? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas.

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94,64 %?

Solución:

a) $n = 36$, $\overline{X} = 2$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{0,3}{\sqrt{36}} = 0,098$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (2 - 0,098; 2 + 0,098) = (1,902; 2,098)$$

b) $\mu = 2,3$ horas no está dentro del intervalo de confianza y no se aceptaría que pueda ser la media con una confianza del 95 %.

c) $NC = 0,9464 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0536 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0268$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}0268 = 0,9732 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,93$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,93\frac{0,3}{\sqrt{100}} = 0,0579$$

Problema 7.4 El contenido en grasas saturadas por litro de leche sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 0,1$ g/l. Se tomó una muestra aleatoria de 100 litros de leche obteniéndose el intervalo de confianza $(0,682; 0,718)$ para el contenido medio de grasas saturadas en la muestra.

a) Calcula el contenido medio de grasas saturadas para los 100 litros de leche de la muestra.

b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo.

c) Halla un intervalo de confianza para la el contenido medio de grasas saturadas con un nivel de confianza del 95 %.

d) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error máximo admisible sea menor que 0,01 g/l?

Solución:

a) $IC = (0,682; 0,718) = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) \Longrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{X} - E = 0,682 \\ \overline{X} + E = 0,718 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} = 0,7 \\ E = 0,018 \end{array} \right.$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,018 = Z_{\alpha/2}\frac{0,1}{\sqrt{100}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,8$$

$$P(Z < 1,8) = 0,9641 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0{,}0718 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,9282 \Longrightarrow 92,82\,\%$$

c) $n = 100$, $\overline{X} = 0,7$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{0,1}{\sqrt{100}} = 0,0196$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (0,7 - 0,0196; 0,7 + 0,0196) = (0,6804, 0,7196)$$

d)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,01 = 1,96\frac{0,1}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 384,16 \Longrightarrow n = 385$$

8. Cataluña

8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Sin problemas de este tipo.

8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Sin problemas de este tipo.

9. País Vasco

9.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 9.1 En una población se toma una muestra aleatoria de 500 personas y se les pregunta si son aficionadas al deporte o no. De ellas 350 respondieron que sí son aficionadas al deporte y el resto que no. Con esta información se pide:

a) Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte. Calcular, además, el error máximo para dicho nivel de confianza.

b) Interpretar los resultados obtenidos.

Solución:

a) $n = 500$, $\hat{p} = \frac{350}{500} = 0,7$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,7\cdot 0,3}{500}} = 0,0402$$

$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,7 - 0,0402; 0,7 + 0,0402) = (0,6598; 0,7402) = (65,98\,\%; 74,02\,\%)$

b) La proporción de población que son aficionados al deporte está entre el 65,98 % y el 74,02 % con una probabilidad del 95 % de que esta afirmación sea correcta.

Problema 9.2 En una determinada ciudad el gasto anual en transporte público realizado por las familias sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros. Se toma una muestra aleatoria de 100 familias, de la que se obtiene un gasto medio de 250 euros.

a) Calcular entre qué valores estará el gasto medio de la población con un nivel de confianza del 99 %.

b) ¿Qué tamaño debería tener la muestra para que el error máximo sea de 10 euros con un nivel de confianza del 99 %?

Solución:

a) $n = 100$, $\overline{X} = 250$ y $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,58$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,58\frac{75}{\sqrt{100}} = 19,35$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (250 - 19,35; 250 + 19,35) = (230,65; 269,35)$$

b)

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 10 = 2,58\frac{75}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 374,4225 \Longrightarrow n = 375$$

9.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 9.3 Tras realizar una prueba de cultura general entre los habitantes de cierta población, se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución normal, de media 68 y desviación típica 18. Se desea clasificar a los habitantes en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de cultura general excelente), de manera que el primer grupo abarque un 20 % de la población, el segundo un 65 %, y el tercero el 15 % restante. ¿Cuáles son las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?
Solución:

$$N(68; 18)$$

- El 20 %:
  $P(X \leq a) = P\left(Z < \frac{a-68}{18}\right) = 0,2 \Longrightarrow P\left(Z < \frac{-a+68}{18}\right) = 0,8 \Longrightarrow \frac{-a+68}{18} = 0,845 \Longrightarrow a = 52,79$

- El $20\,\% + 65\,\% = 85\,\%$:
  $P(X \leq a) = P\left(Z < \frac{a-68}{18}\right) = 0,85 \Longrightarrow \frac{a-68}{18} = 1,035 \Longrightarrow a = 86,63$

En conclusión:

- Por debajo de una calificación de 52,79 puntos estarán el 20 % de la población con baja cultura general.
- Con una calificación comprendida entre 52,79 y 86,63 puntos estarán el 65 % de la población con cultura general aceptable.
- Con una calificación superior a 86,63 puntos estarán el 15 % de la población con cultura general excelente.

Problema 9.4 La nota de la Evaluación para el Acceso a la Universidad del alumnado que se ha preinscrito en la carrera A sigue una distribución normal de media 6,8 y desviación típica 0,6. Por otro lado, la nota de los/las alumnos/as que se han preinscrito en la carrera B sigue una distribución normal de media 7 y desviación típica 0,5. Si en ambos casos solo se puede admitir al 25 % del alumnado preinscrito, ¿cuál de las dos carreras requerirá una nota mínima más baja?

Solución:

- A se comporta como una $N(6,8; 0,6)$, el 25 %:
  $P(X \geq a) = 1 - P\left(Z < \frac{a-6,8}{0,6}\right) = 0,25 \Longrightarrow P\left(Z < \frac{a-6,8}{0,6}\right) = 0,75 \Longrightarrow \frac{a-6,8}{0,6} = 0,675 \Longrightarrow a = 7,205.$

- B se comporta como una $N(7; 0,5)$, el 25 %:
  $P(X \geq a) = 1 - P\left(Z < \frac{a-7}{0,5}\right) = 0,25 \Longrightarrow P\left(Z < \frac{a-7}{0,5}\right) = 0,75 \Longrightarrow \frac{a-7}{0,5} = 0,675 \Longrightarrow a = 7,338.$

La nota de corte es más baja en la carrera A.

10. Extremadura

10.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 10.1 El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono sigue una distribución normal con desviación típica 24 horas. Se pregunta a 100 clientes por el tiempo invertido en la portabilidad, obteniéndose una media de 36 horas. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % para la media de tiempo que tarda dicha compañía en hacer efectiva la portabilidad.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 5?

Solución:

$$N(\mu; 24)$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = 36$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{24}{\sqrt{100}} = 4,704$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (36 - 4,704; 36 + 4,704) = (31,296; 40,704)$$

b) $E = \dfrac{5}{2} = 2,5$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2,5 = 1,96\frac{24}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 354,041856 \Longrightarrow n = 355$$

10.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 10.2 Se realiza un estudio sobre el tiempo de reacción de los conductores ante un imprevisto. Se considera una población de 10000 condudores, de los cuales 5000 tienen una antigüedad superior a 10 años, 3000 tienen una antigüedad entre 1 y 10 años y el resto tienen una antigüedad inferior a 3 años. Se selecciona una muestra de 500 conductores mediante muestreo estratificado cou afijación proporcional. Se pide, justificando la respuesta:

a) ¿Cuántos conductores de cada uno de los estratos mencionados anteriormente se incluirán en la muestra.

b) En los conductores con una antigüedad de menos de 3 años que resultan elegidos de la muestra, se obnerva que el tiempo medio de reacción es de 1,2 segundos. Supuesta que dicha variable tiene distribudón normal con desviación típica 0,3 segundos, proporcionar uu intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de reacción de estos conductores.

Solución:

a) A es la antigüedad en la conducción.

	$a > 10$	$3 < A < 10$	$A < 3$	Total
Población	5000	3000	2000	10000
Muestra	x	y	z	500

$$\frac{5000}{x} = \frac{3000}{y} = \frac{2000}{z} = \frac{10000}{500} \Longrightarrow$$
$$x = 250, \quad y = 150, \quad z = 100$$

b) $A < 3 \Longrightarrow n = 100$, $\overline{X} = 1,2$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{0,3}{\sqrt{100}} = 0,0588$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (1,2 - 0,0588; 1,2 + 0,0588) = (1,1412; 1,2588)$$

11. Madrid

11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 11.1 El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.

a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99,2 % para estimar el precio medio mensual, μ, de las clases de Pilates.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

Solución:
$N(\mu; 7)$ ya que $\sigma^2 = Var(X) = 49 \Longrightarrow \sigma = 7$

a) $n = 64$, $\overline{X} = 34$ y $NC = 0,992$:
$1 - \alpha = 0,992 \Longrightarrow \alpha = 0,008 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,004$
$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,004 = 0,996 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 2,65$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,65\frac{7}{\sqrt{64}} = 2,319 \Longrightarrow$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (34 - 2,319; 34 + 2,319) = (31,681; 36,319)$$

b) $E = 3$ y $NC = 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 3 = 1,96\frac{7}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(1,96\frac{7}{3}\right)^2 = 20,91 \Longrightarrow n = 21$$

Problema 11.2 El peso de las mochilas escolares de los niños de 5º y 6º de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 105$ kilogramos.

a) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95 %. La amplitud de este intervalo resultó ser 0,49 kilogramos. Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.

b) Supóngase que $\mu = 6$ kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares, calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5,75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

Solución:

$$N(\mu; 1,5)$$

a) $2E = 0,49 \Longrightarrow E = 0,245$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{1,5}{\sqrt{n}} = 0,245 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,5 \cdot 1,96}{0,245}\right)^2 = 144 \Longrightarrow$$

$$n = 144$$

b) $\mu = 6$, $\sigma = 1,5$ y $n = 225$.

$$P(\overline{X} \geq 5,75) = P\left(Z \geq \frac{5,75 - 6}{1,5/\sqrt{225}}\right) = P(Z \geq -2,5) =$$

$$1 - P(Z \leq -2,5) = 1 - (1 - P(Z \leq 2,5)) = P(Z \leq 2,5) = 0,9938$$

11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 11.3 Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.

a) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.

b) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

Solución:

$$N(\mu; 25)$$

a) $n = 15$, $\overline{X} = 560$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{25}{\sqrt{15}} = 12,652$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (547,348; 572,652)$$

b) $\mu = 560 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(560, \frac{25}{\sqrt{50}}\right) = N(560; 3,54)$

$$P(\overline{X} \geq 565) = P\left(Z \geq \frac{565 - 560}{3,54}\right) = P(Z \geq 1,41) =$$

$$1 - P(Z \leq 1,41) = 1 - 0,9207 = 0,0793$$

Problema 11.4 Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es $P = 0,22$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.

b) Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 había faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.

Solución:

a) $p = 0,22$, $q = 0,78$ y $z_{\alpha/2} = 2,576$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2,576}{0,04}\right)^2 (0,22 \cdot 0,78) = 711,69$$

Luego $n = 712$.

b) $n = 1000$, $z_{\alpha/2} = 1,96$ $p = \dfrac{250}{1000} = 0,25 \Longrightarrow q = 0,75$.

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{1000}} = 0,0268$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (0,25 - 0,0268; 0,25 + 0,0268) =$$
$$(0,2232; 0,2768) = (22,32\,\%; 27,68\,\%)$$

12. Valencia

12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Sin problemas de este tipo.

12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Sin problemas de este tipo.

13. La Rioja

13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 13.1 Una cadena de supermercados compra naranjas en contenedores cada uno de los cuales contiene 400 bolsas cuyo peso medio es 6 kg con una desviación típica de 550 gr.

a) Se toma al azar un contenedor, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de ese contenedor sea menor que 5 kg y 950 gr?

b) Pedro no conoce el peso medio de las bolsas pero sabe que la desviación típica es 550 gr. Ha pesado todas las bolsas de un contenedor (400) y ha obtenido un peso medio de 6 kg y 30 gr. Con esos datos ha calculado para el peso medio de las bolsas un intervalo de confianza del 90 % ¿Cuál es el intervalo calculado por Pedro?

Solución:

a) $P(\overline{X} \leq 5,95)) = P\left(Z < \dfrac{5,95-6}{0,55/\sqrt{400}}\right) = P(Z < -1,82) = 1 - P(Z < 1,82) = 1 - 0,9656 = 0,0344$

b) $n = 15$, $\overline{X} = 6,03$ y $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,645\frac{0,55}{\sqrt{400}} = 0,045$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (6,03 - 0,045; 6,03 + 0,045) = (5,985; 6,075)$$

Problema 13.2 Un balón de baloncesto debe pesar entre 567 y 650 gr. Se han fabricado los balones con los que se jugará en China a finales de verano la Copa del Mundo. El peso de los balones fabricados sigue una distribución normal de desviación típica 25 gr. Se distribuyen en cajones de 100 unidades.

a) Si el peso medio de los balones fuese 605 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de los balones de un cajón superase los 603 gr?

b) El peso medio de una muestra de 4 cajones (400 balones) es de 610 gr, determina un intervalo de confianza del 95 % para la media de la producción.

Solución:

a) $P(\overline{X} \geq 603)) = P\left(Z > \dfrac{603-605}{25/\sqrt{100}}\right) = P(Z > -0,8) = 1 - P(Z < -0,8) = 1 - (1 - P(Z < 0,8)) = P(Z < 0,8) = 0,7881$

b) $n = 400$, $\overline{X} = 610$ y $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{25}{\sqrt{400}} = 2,45$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (610 - 2,45; 610 + 2,45) = (607,55; 612,45)$$

13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 13.3 Una máquina envasa café en bolsas siguiendo una distribución normal de 500 gr de peso medio y una desviación típica de 30 gr. Las bolsas se empaquetan en cajas de 100 unidades.

a) Se toma al azar una caja de 100 bolsas, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de esa caja sea menor que 495 gr?

b) Cristina no conoce el peso medio de las bolsas, aunque conoce la desviación típica (30 gr) Ha pesado un paquete de 100 bolsas y ha obtenido un peso medio de 505 gr; con estos datos ha calculado un intervalo de confianza del 95 % para la media. ¿Cuál es el intervalo determinado por Cristina?

Solución:

$$N(500;30)$$

a) $n=100,\ P(\overline{X}\le 495)) = P\left(Z<\dfrac{495-500}{30/\sqrt{100}}\right) = P(Z<-1,67) = 1-P(Z<1,67) = 1-0,9525 = 0,0475$

b) $n=100,\ \overline{X}=505$ y $NC=0,95=1-\alpha \Longrightarrow \alpha=0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2}=0,025$

$P(Z\le Z_{\alpha/2}) = 1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2}=1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{30}{\sqrt{100}} = 5,88$$

$$IC = (\overline{X}-E;\overline{X}+E) = (505-5,88;505+5,88) = (499,12;510,88)$$

Problema 13.4 El peso de los estudiantes que ingresan en la Universidad sigue una distribución normal de desviación típica 15 kg.

a) Si el peso medio fuese 70 kg, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 100 estudiantes superase los 72 kg?

b) El peso medio de una muestra de 225 alumnos es de 72 kg, determina un intervalo de confianza del 95 % para el peso medio de los estudiantes que ingresan en la Universidad.

Solución:

$$N(\mu;15)$$

a) $n=100,\ \mu=70,\ P(\overline{X}\ge 72)) = P\left(Z>\dfrac{72-70}{15/\sqrt{100}}\right) = P(Z>1,33) = 1-P(Z<1,33) = 1-0,9082 = 0,0918$

b) $n=225,\ \overline{X}=72$ y $NC=0,95=1-\alpha \Longrightarrow \alpha=0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2}=0,025$

$P(Z\le Z_{\alpha/2}) = 1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2}=1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{15}{\sqrt{225}} = 1,96$$

$$IC = (\overline{X}-E;\overline{X}+E) = (72-1,96;72+1,96) = (70,04;73,96)$$

14. Murcia

14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 14.1 El tiempo, en años, de renovación de un ordenador portátil se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica de 0,9 años. Si tomamos al azar a 900 usuarios, se obtiene una media muestral de 3,5 años. Hallar el intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de renovación de un ordenador portátil.

Solución:

$$N(\mu;0,9),\quad n=900,\quad NC=95\,\% \text{ y } \overline{X}=3,5$$

$$NC=0,95=1-\alpha\Longrightarrow \alpha=0,05\Longrightarrow \frac{\alpha}{2}=0,025$$

$$P(Z\le Z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-0,025=0,975\Longrightarrow Z_{\alpha/2}=1,96$$

$$E=Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Longrightarrow E=1,96\frac{0,9}{\sqrt{900}}=0,0588$$

$$IC=(\overline{X}-E;\overline{X}+E)=(3,5-0,0588;3,5+0,0588)=(3,4412;3,5588)$$

Problema 14.2 El tiempo en minutos de conexión a Internet de los estudiantes de un centro de secundaria, sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Para poder estimar la media del tiempo de conexión, se construye un intervalo de confianza con un error menor o igual a 5 minutos, con un nivel de confianza del 95 %. Determine cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar.

Solución:

$$N(\mu;10),\quad E=5 \text{ y } NC=95\,\%$$

$$NC=0,95=1-\alpha\Longrightarrow \alpha=0,05\Longrightarrow \frac{\alpha}{2}=0,025$$

$$P(Z\le Z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-0,025=0,975\Longrightarrow Z_{\alpha/2}=1,96$$

$$E=Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Longrightarrow 5=1,96\frac{10}{\sqrt{n}}\Longrightarrow n\ge 15,3664\Longrightarrow n=16$$

14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 14.3 Se sabe que la estatura de los individuos de Murcia es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 6 cm. Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos y da una media de 176 cm. Obtenga un intervalo de confianza, con un 99 % de confianza, para la media de la estatura de la población.

Solución:

$$N(\mu;6),\quad n=225,\quad NC=99\,\% \text{ y } \overline{X}=176$$

$$NC=0,99=1-\alpha\Longrightarrow \alpha=0,01\Longrightarrow \frac{\alpha}{2}=0,005$$

$$P(Z\le Z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-0,005=0,9795\Longrightarrow Z_{\alpha/2}=2,58$$

$$E=Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Longrightarrow E=2,58\frac{6}{\sqrt{225}}=1,032$$

$$IC=(\overline{X}-E;\overline{X}+E)=(176-1,032;176+1,032)=(174,968;177,032)$$

Problema 14.4 En un estudio realizado por una empresa se ha obtenido que el intervalo de confianza de una variable, a un nivel de confianza del 95 %, es: (6, 824; 9, 176). Hallar la media y el tamaño de la muestra para obtener dicho intervalo conociendo que la varianza de la distribución es de 9. Explique cada uno de los pasos realizados.
Solución:

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{X}+E=9,176\\ \overline{X}+E=6,824\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\overline{X}=8\\ E=1,176\end{array}\right. \quad \text{y} \quad \sigma=\sqrt{9}=3$$

$NC=0,95=1-\alpha \Longrightarrow \alpha=0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2}=0,025$

$P(Z\le Z_{\alpha/2})=1-\dfrac{\alpha}{2}=1-0,025=0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2}=1,96$

$$E=Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,176=1,96\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n=25$$

15. Navarra

15.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 15.1 En una muestra aleatoria entre estudiantes de bachillerato de una región, 150 afirmaron que participan en actividades de voluntariado y 350 afirmaron que no realizan ese tipo de actividades.

a) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que no realizan actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 96 %.

b) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que participan en actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 92 %.

(Escriba las fórmulas necesarias)

Solución:

$$n=500,\quad \hat{p}=\frac{150}{500}=0,3 \;\text{ y }\; \hat{q}=\frac{350}{500}=0,7$$

a) $NC=0,96=1-\alpha \Longrightarrow \alpha=0,04 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2}=0,02$

$P(Z\le Z_{\alpha/2})=1-\dfrac{\alpha}{2}=1-0,02=0,98 \Longrightarrow Z_{\alpha/2}=2,055$

$$E=Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow$$

$$E=2,055\sqrt{\frac{0,3\cdot 0,7}{500}}=0,042115$$

$IC=(\hat{q}-E;\hat{q}+E)=(0,7-0,042115;0,7+0,042115)=(0,657885;0,742115)=(65,79\,\%;74,21\,\%)$

b) $NC=0,92=1-\alpha \Longrightarrow \alpha=0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2}=0,04$

$P(Z\le Z_{\alpha/2})=1-\dfrac{\alpha}{2}=1-0,04=0,96 \Longrightarrow Z_{\alpha/2}=1,755$

$$E=Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow E=1,755\sqrt{\frac{0,3\cdot 0,7}{500}}=0,03597$$

$$IC = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) = (0,3 - 0,03597; 0,3 + 0,03597) = (0,26403; 0,33597) =$$
$$(26,40\,\%; 33,60\,\%)$$

15.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 15.2 La duración de un tipo de batería para teléfonos móviles es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de tres meses. Se toma una muestra aleatoria de diez baterías y se miden las siguientes duraciones (en meses): 15.7, 7.2, 21.6, 19.4, 14.5, 17.3, 15.2, 23.4, 21.5 y 15.8

a) Construya un intervalo de confianza para la duración media de este tipo de baterías, con un nivel de confianza del 98 %.

b) Determine cuál debe ser el tamaño de la muestra para que el error máximo se reduzca a la mitad.

(Escriba las fórmulas necesarias)
Solución:

$$N(\mu; 3)$$

a) $n = 10$, $\overline{X} = 17,16$ y $NC = 0,98 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,02 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,01 = 0,99 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,325$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,325\frac{3}{\sqrt{10}} = 2,20569$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (17,16 - 2,20569; 17,16 + 2,20569) = (14,95431; 19,36569)$$

b) $E = \dfrac{2,205688667}{2} = 1,102844333$, y $Z_{\alpha/2} = 2,325$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,102844333 = 2,325\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 40$$

16. Andalucía

16.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 16.1 Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partirlo político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.

a) Calcule un intervalo de confianza al 97 % para la proporción de individuos que piensen votar a ese partido en dicha ciudad.

b) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestre para estimar la proporción con un error inferior al 2 %.

(Escriba las fórmulas necesarias)

Solución:

$$n = 300, \quad \hat{p} = \frac{135}{300} = 0,45 \ \text{ y } \ \hat{q} = \frac{165}{300} = 0,55$$

a) $NC = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,988 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow$$

$$E = 2,17\sqrt{\frac{0,45\cdot 0,55}{300}} = 0,0623$$

$IC = (\hat{q}-E; \hat{q}+E) = (0,45-0,0623; 0,45+0,0623) = (0,3877; 0,5123) = (38,77\,\%; 51,23\,\%)$

b) $Z_{\alpha/2} = 2,17$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,02 = 2,17\sqrt{\frac{0,45\cdot 0,55}{n}} \Longrightarrow$$
$$n \ge 2913,632 \Longrightarrow n = 2914$$

Problema 16.2 Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica 8 minutos. Se elige al azar una muestra de 9 empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:

10 17 8 27 6 9 32 5 21

a) Determine un intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional. .

b) Con una confianza del 95,5 %, ¿qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a 1,5 minutos?

(Escriba las fórmulas necesarias)
Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $n = 9$, $\overline{X} = 15$ y $NC = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,04 = 0,96 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,75$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,75\frac{8}{\sqrt{9}} = 4,67$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (15 - 4,67; 15 + 4,67) = (10,33; 19,67)$$

b) $E = 1,5$, y $Z_{\alpha/2} = 2,005$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,5 = 2,005\frac{8}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 114,35 \Longrightarrow n = 115$$

16.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 16.3 Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.

a) Obtenga un intervalo, con un 92 % de confianza para la puntuación media de los participantes en dicho concurso.

b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98 %.

(Escriba las fórmulas necesarias)
Solución:

$$N(\mu; 6)$$

a) $n = 64$, $\overline{X} = 35$ y $NC = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,04 = 0,96 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,75$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,75\frac{6}{\sqrt{64}} = 1,275$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (35 - 1,275; 35 + 1,275) = (33,725; 36,275)$$

b) $E = 2$, y $Z_{\alpha/2} = 2,33$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2 = 2,33\frac{6}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 48,86 \Longrightarrow n = 49$$

Problema 16.4 Se quiere estimar la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Para ello se escoge aleatoriamente una muestra de 50 expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados, resultando que el 22 % de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco.

a) Para un nivel de confianza del 92 %, calcule un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.

b) Determine cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizarlos por causas debidas al tabaco sea inferior al 3 %.

Solución:

$$n = 50, \quad \hat{p} = 0,22 \text{ y } \hat{q} = 1 - 0,22 = 0,78$$

a) $NC = 0,92 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,04 = 0,96 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,75$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \Longrightarrow$$

$$E = 1,75\sqrt{\frac{0,22 \cdot 0,78}{50}} = 0,1025$$

$$IC = (\hat{q} - E; \hat{q} + E) = (0,22 - 0,1025; 0,22 + 0,1025) = (0,1175; 0,3225) = (11,75\,\%; 32,25\,\%)$$

b) $Z_{\alpha/2} = 1,75$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,03 = 1,75\sqrt{\frac{0,22 \cdot 0,78}{n}} \Longrightarrow$$
$$n \geq 583,917 \Longrightarrow n = 584$$

17. Galicia

17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 17.1 Un estudio electoral con una muestra de 400 electores obtiene un intervalo para la proporción de votantes de un partido de [0,23;0,31].

a) ¿Cuánto vale la proporción muestral?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se estableció el intervalo?

c) ¿Cuál es el error máximo cometido con el intervalo anterior?

Solución:

a) $p = \dfrac{0,31 + 0,23}{2} = 0,27$

b) $E = 0,31 - 0,27 = 0,04$ y $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,04 = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,27 \cdot 0,73}{400}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,802 \Longrightarrow$ $P(Z < 1,80) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9641 \Longrightarrow \alpha = 0,0718 \Longrightarrow NC = 1 - 0,0718 = 0,9282$, $NC = 92,82\,\%$

c) Como ya hemos calculado es de $\pm 4\,\%$.

Problema 17.2 Después de años de utilizarlo se sabe que la puntuación de un test de uso habitual en cierta rama industrial sigue una distribución normal de media 74 y desviación típica 16. En una empresa se decide realizarlo a 100 de sus empleados.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una media muestral superior a 78 puntos, de seguirse la pauta general?

b) ¿Y la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 74 puntos?

Solución:

$$N(74, 16)$$

a) $P(\overline{X} > 78) = P\left(Z > \dfrac{78 - 74}{16/\sqrt{100}}\right) = P(Z > 2,5) = 1 - P(Z < 2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062.$

b) $P(\overline{X} < 74) = P\left(Z < \dfrac{74 - 74}{16/\sqrt{100}}\right) = P(Z < 0) = 0,5.$

17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 17.3 Se tomó una muestra aleatoria de 100 jóvenes y se les midió el nivel de glucosa en sangre obteniendo una media muestral de 105 mg/cm^3. Se sabe que la desviación típica en la población es de 15 mg/cm^3.

a) Obtén un intervalo de confianza, al 95 %, para el nivel de glucosa en sangre en la población.

b) ¿Cuánto vale el error máximo en el intervalo anterior?

c) ¿Qué ocurre con la amplitud del intervalo si el nivel de confianza es del 99 %?

Solución:

$$N(105; 15)$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = 105$ y $Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 1,96\frac{15}{\sqrt{100}} = 2,94$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (105 - 2,94; 105 + 2,94) = (102,06; 107,94)$$

b) $E = 2,94$.

c) La amplitud del intervalo aumenta: $Z_{\alpha/2} = 2,575$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,575\frac{15}{\sqrt{100}} = 3,8625$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (105 - 3,8625; 105 + 3,8625) = (101,14; 108,86)$$

Intervalo que tiene una amplitud mayor.

Problema 17.4 En una muestra aleatoria de $n = 25$ estudiantes de bachillerato, el 75 % afirman querer realizar estudios universitarios.

a) Calcula un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes de bachillerato que quieren realizar estudios universitarios con un nivel de confianza del 90 %.

b) Si se sabe que 8 de cada 10 estudiantes de bachillerato afirman querer realizar estudios universitarios y tomamos una muestra aleatoria de $n = 100$ estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de estudiantes de la muestra que quieren realizar estudios universitarios sea superior al 65 %?

Solución:

$$n = 25, \quad \hat{p} = 0,75 \;\text{ y }\; \hat{q} = 1 - 0,75 = 0,25$$

a) $NC = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} \Longrightarrow$$

$$E = 1,645\sqrt{\frac{0,75\cdot 0,25}{25}} = 0,1425$$

$IC = (\hat{q}-E; \hat{q}+E) = (0,75-0,1425; 0,75+0,1425) = (0,6075; 0,8925) = (60,75\,\%; 89,25\,\%)$

b) $p \approx N\left(\hat{p}; \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = N(0,8; 0,04)$

$$P(p \geq 0,65) = P\left(Z > \frac{0,65 - 0,8}{0,04}\right) = P(Z > -3,75) = P(Z < 3,75) = 0,9999$$