Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Marzo 2020

Problema 1 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 4x - (3/2) & \text{si} \quad x \le c \\ (x-2)^2 + (3/2) & \text{si} \quad x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$?

b) Para $c = 1$, representa gráficamente la función f.

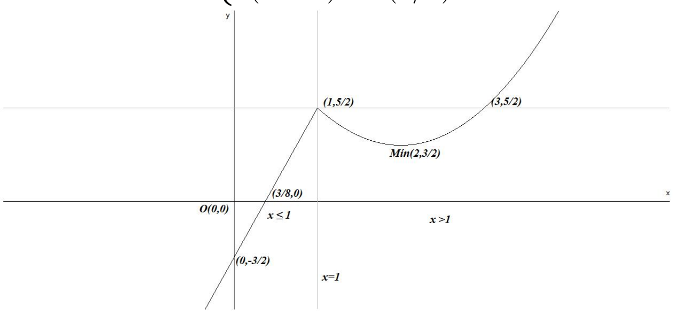
Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow c^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow c^-} (4x - (3/2)) = 4c - (3/2) \\ \lim\limits_{x \longrightarrow c^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow c^+} ((x-2)^2 + (3/2)) = (c-2)^2 + (3/2) \end{array} \right. \Longrightarrow 4c - \frac{3}{2} = (c-2)^2 + \frac{3}{2} \Longrightarrow$$

$$-c^2 + 8c - 7 = 0 \Longrightarrow c = 1, \ \ c = 7$$

b) Si $c = 1$: $f(x) = \begin{cases} 4x - (3/2) & \text{si} \quad x \le 1 \\ (x-2)^2 + (3/2) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$



Para dibujar la rama $x \le 1 \Longrightarrow f(x) = 14x - (3/2)$ es una recta que pasa por los puntos: $(0, -3/2)$, $(3/8, 0)$ y $(1, 5/2)$ en el cual finaliza. Para dibujar la rama $x > 1 \Longrightarrow f(x) = (x-2)^2 + (3/2)$ es una parábola que pasa por los puntos: $(1, 5/2)$, $(2, 3/2)$ y $(3, 5/2)$. Como $f'(x) = 2(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $f''(x) = 2 \Longrightarrow f(2) = 2 > 0 \Longrightarrow$ el punto $(2, 3/2)$ es un mínimo local.

Problema 2 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x+2| + t & \text{si} \quad x \le -1 \\ (x-t)^2 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = -1$?

b) Para $t = 3$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, +\infty)$.

c) Para $t = 3$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1, +\infty)$.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| + t & \text{si} \quad x \le -1 \\ (x-t)^2 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} -(x+2) + t & \text{si} \quad x \le -2 \\ (x+2) + t & \text{si} \quad -2 < x \le -1 \\ (x-t)^2 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

a) Para que la función f sea continua en $x = -1$ los límites laterales deben de coincidir:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} ((x+2) + t) = 1 + t \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} (x-t)^2 = (-1-t)^2 \end{cases} \Longrightarrow 1+t = (-1-t)^2 \Longrightarrow$$

$$-t^2 - t = 0 \Longrightarrow t = 0, \ \ t = -1$$

b) Para $t = 3$ y en el intervalo $(-1, +\infty) \Longrightarrow f(x) = (x-3)^2 \Longrightarrow$ $f'(x) = 2(x-3) = 0 \Longrightarrow x = 3$. Por el criterio de la segunda derivada: $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(3) = 2 > 0 \Longrightarrow$ hay un mínimo en el punto $(3, 0)$

c) Por el apartado anterior la función decrece en el intervalo $(-1, 0)$ y crece en $(1, +\infty)$

Problema 3 Se pide:

a) Sea la función $f(x) = ax^3 + bx$, calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 1)$ y que en este punto la pendiente de la recta tangente vale -3.

b) Si en la función anterior $a = 1$ y $b = -12$, determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos extremos.

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$

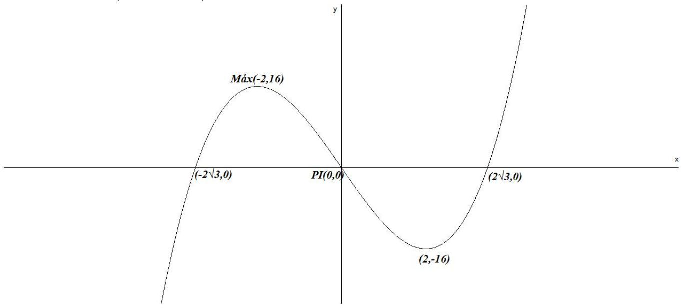
$$\begin{cases} f(1) = 1 \Longrightarrow a + b = 1 \\ f'(1) = -3 \Longrightarrow 3a + b = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = -2x^3 + 3x$$

b) $f(x) = x^3 - 12x \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-2, 2)$. Tiene un máximo local en $(-2, 16)$ y un mínimo local en $(2, -16)$



Problema 4 El coste de un marco para una ventana rectangular es de 50 euros por cada metro de lado vertical y de 25 euros por cada metro de lado horizontal. Se desea construir una ventana de superficie igual a 2 m^2. Calcúlense las dimensiones (largo y alto) para que el marco sea lo más barato posible. Calcúlese el precio mínimo del marco de dicha ventana. **Solución:** LLamamos x a la longitud del lado horizontal e y a la longitud del lado vertical.

$$x \cdot y = 2 \Longrightarrow y = \frac{2}{x}, \;\; p(x, y) = 2x + 2y$$

$$C(x, y) = 50(x + 2y) \Longrightarrow C(x) = 50\left(x + \frac{4}{x}\right) = \frac{50(x^2 + 4)}{x}$$

$$C'(x) = \frac{50(x^2 - 4)}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 2, \quad x = -2$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$C'(x)$	$+$	$-$	$+$
$C(x)$	creciente	decreciente	creciente

El mínimo estaría en el punto $x = 2$, es decir, el coste mínimo sería de 200 euros y correspondería a unas dimensiones de 2 metros de lado horizontal y 1 metro de lado vertical.