Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2020

Problema 1 El número de vehículos que ha pasado cierto día por el peaje de una autopista viene dado por la función:

$$N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2 & \text{si} \quad 0 \le t \le 9 \\ \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 & \text{si} \quad 9 < t \le 24 \end{cases}$$

donde N indica el número de vehículos y t el tiempo transcurrido en horas desde las $0:00$ h.

a) ¿Es continua la función $N(t)$?

b) ¿Entre qué horas aumentó el número de vehículos que pasaba por el peaje? ¿en qué horas disminuye?

c) ¿A qué hora pasó el mayor número de vehículos? ¿Cuál fue el número?

Solución:

a) Las ramas son continuas, estudiamos la continuidad en $t = 9$:

$$\lim_{t\longrightarrow 9^-}\left(\left(\frac{t-3}{3}\right)^2+2\right) = 6; \ \lim_{t\longrightarrow 9^+}\left(10-\left(\frac{t-15}{3}\right)^2\right) = 6; \ f(9) = 6$$

Luego f es continua en el intervalo $[0, 24]$ en el que está definida.

b)

$$N'(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{t-3}{3}\right) & \text{si} \quad 0 \le t \le 9 \\ \\ -\frac{2}{3}\left(\frac{t-15}{3}\right) & \text{si} \quad 9 < t \le 24 \end{cases}$$

En la rama $0 \le t \le 9$: $N'(t) = 0 \Longrightarrow t = 3$

	$(0,3)$	$(3,9)$
$N'(t)$	$-$	$+$
$N(t)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

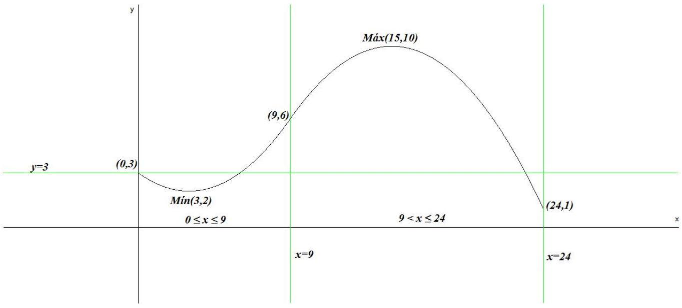
la función decrece en el intervalo $(0, 3)$ y crece en el $(3, 9)$ con un mínimo local en el punto $(3, 2)$.

En la rama $9 < t \leq 24$: $N'(t) = 0 \Longrightarrow t = 15$

	$(9,15)$	$(15,24)$
$N'(t)$	$+$	$-$
$N(t)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

la función decrece en el intervalo $(15, 24)$ y crece en el $(9, 15)$ con un máximo local en el punto $(15, 10)$.
Luego la función decrece en el intervalo $(0, 3) \cup (15, 24)$ y crece en el intervalo $(3, 15)$.

c) El mayor número de vehículos pasó a las 15 horas y es de 10 vehículos.



Problema 2 Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años, y su precio $P(t)$ (en miles de euros) varió con el tiempo t (en años) que llevaba en el mercado según la función

$$P(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 6 \\ \\ -\frac{113}{14}t^2 + \frac{3826}{7} & \text{si} \quad 6 < t \leq 8 \end{cases}$$

a) ¿Cuál fue el precio de salida del producto?

b) ¿Es continua la función? ¿Es derivable? Encontrar los conjuntos de continuidad y derivabilidad.

c) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento del precio del producto.

d) Averigua en qué momento se alcanzaron los precios máximo y mínimo y cuáles fueron estos precios.

Solución:

a) $P(0) = 40$, es decir, 40000 euros.

b) Las ramas son continuas, estudiamos la continuidad en $t = 6$:

$$\lim_{t \longrightarrow 6^-} \left(\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40 \right) = 256; \quad \lim_{t \longrightarrow 6^+} \left(-\frac{113}{14}t^2 + \frac{3826}{7} \right) = 256; \quad f(6) = 256$$

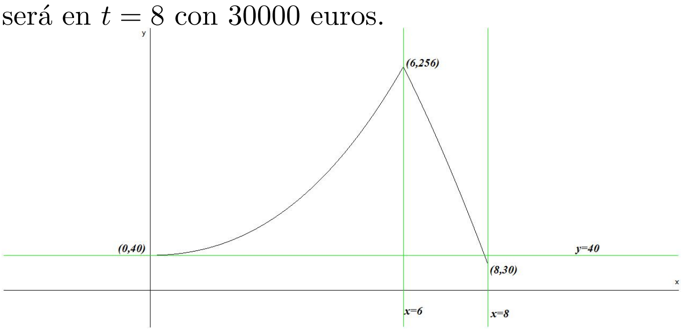
Luego f es continua en el intervalo $[0, 8]$ en el que está definida. Derivabilidad en $t = 6$

$$P'(t) = \begin{cases} t^2 + 8t & \text{si} \quad 0 \le t \le 6 \\ \\ -\frac{113}{7}t & \text{si} \quad 6 < t \le 8 \end{cases} \Longrightarrow P'(6^-) = 48, \ \ P'(6^+) = -\frac{678}{7}$$

Luego P no es derivable en $t = 6$.
La función es continua en el intervalo $[0, 8]$ y derivable en el intervalo $[0, 6) \cup (6, 8]$

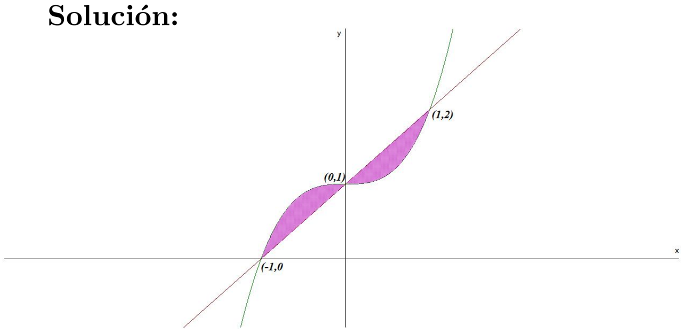
c) En la rama $0 \le t \le 6$: $N'(t) = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = -8$(N0 vale). Tenemos $P(t) > 0 \Longrightarrow$ la función es creciente en el intervalo $[0, 6]$.
En la rama $6 < t \le 8$: $N'(t) = 0 \Longrightarrow t = 0$. Tenemos $P'(t) < 0 \Longrightarrow$ la función decrece en el intervalo $(6, 8]$

d) El valor máximo se dará en $t = 6 \Longrightarrow P(6) = 256$ (256000 euros). El valor mínimo se dará en $P(0) = 40$ o en $P(8) = 30$. En nuestro caso será en $t = 8$ con 30000 euros.



Problema 3 Dibujar el área cerrada entre los gráficas de las funciones siguientes: $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = x + 1$. Calcular el área del recinto anterior.

Solución:



$f(x) = g(x) \Longrightarrow x^3 + 1 = x + 1 \Longrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm 1$. Luego tendremos dos áreas, S_1 entre -1 y 0 y S_2 entre 0 y 1.

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\,dx = \int (x^3 - x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\,dx = F(0) - F(-1) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} (f(x) - g(x))\,dx = F(1) - F(0) = -\frac{1}{4} - 0 = -\frac{1}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\ u^2$$

Problema 4 Representa gráficamente la función $y = -ax^3 - bx + c$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que tiene un mínimo relativo en el punto $(x, y) = (1, -1)$. Justifica brevemente la representación gráfica obtenida.

Solución:

$$f(x) = -ax^3 - bx + c \Longrightarrow f'(x) = -3ax^2 - b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 0 \Longrightarrow c = 0 \\ f(1) = -1 \Longrightarrow -a - b + c = -1 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow -3a - b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = 0 \end{array}\right.$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \Longrightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}$$

Puntos de corte: $(0, 0)$ y $(\pm\sqrt{3}, 0)$

Monotonía: $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

$f''(x) = 3x$. $f''(-1) = -3 < 0 \Longrightarrow$ Máx$(-1, 1)$ y $f''(1) = 3 > 0 \Longrightarrow$ Mín$(1, -1)$