Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Diciembre 2019

Problema 1 *(2,5 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} x + 2y + (a+2)z = 1 \\ x + y + az = 0 \\ (a-1)x + 2z = a+1 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuélvase para $a = 2$.

Junio 2019 coincidente (Comunidad de Madrid)
Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a-1 & 0 & 2 & a+1 \end{array}\right); \quad |A| = a^2 - 3a = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 3$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 4F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible.

b) Si $a = 2$

$$\left\{\begin{array}{c} x + 2y + 4z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 2z = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Una empresa construye dos tipos de motocicletas eléctricas A y B. Cada jornada dispone de 3600 euros para la fabricación de estas motocicletas, siendo el coste de manufactura de 200 euros para la motocicleta tipo A y de 400 euros para la motocicleta tipo B. Además las condiciones de mercado exigen que el número total de motocicletas fabricadas por jornada no sea mayor de 12. Por otro lado, debido a la organización de la producción en esa empresa, cada jornada no puede fabricar más de 8 motocicletas de tipo B.

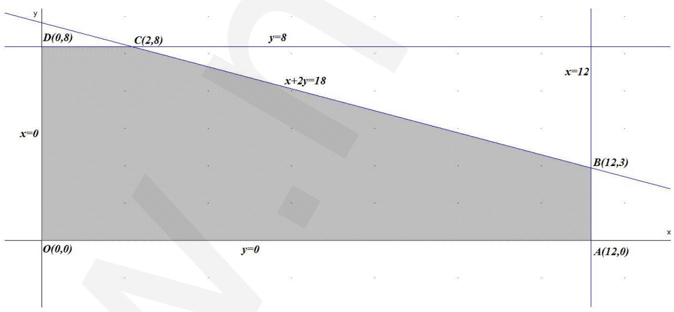
a) ¿Cuántas motocicletas de cada tipo puede fabricar una jornada para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 4 motocicletas de tipo A y el doble de tipo B?

b) Sabiendo que el beneficio obtenido en la venta de una motocicleta de tipo A es de 200 euros y en la de tipo B es de 320 euros y suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, ¿cuántas motocicletas de cada tipo deben fabricar en una jornada para que el beneficio sea máximo? ¿y para maximizar el número de motocicletas de tipo A fabricadas?

Julio 2019 (Comunidad de Asturias)
Solución:
LLamamos x : nº de motocicletas A e y nº de motocicletas B.

a) La región factible es:

$$\left\{\begin{array}{l} 200x + 400y \le 3600 \\ x \le 12 \\ y \le 8 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y \le 18 \\ x \le 12 \\ y \le 8 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right.$$

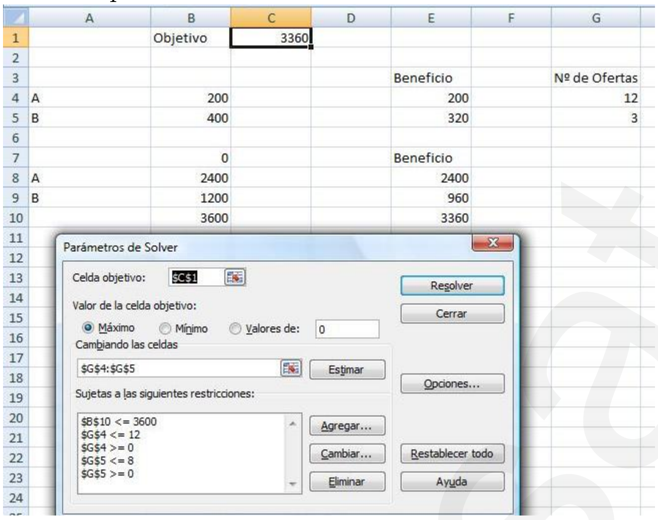


Los vértices son: $O(0,0)$, $A(12,0)$, $B(12,3)$, $C(2,8)$ y $D(0,8)$.
El punto $(4,8)$ está fuera de la región factible y, por tanto, no cumple las condiciones del problema. No se podrían fabricar 4 motocicletas de tipo A y el doble de tipo B.

b) $f(x,y) = 200x + 320y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(12,0) = 2400 \\ f(12,3) = 3360 \;\text{ Máximo} \\ f(2,8) = 2960 \\ f(0,8) = 2560 \end{array}\right.$$

Hay que fabricar 12 motocicletas A y 3 motocicletas B para obtener un beneficio máximo de 3360 euros.
Solución por solver:



Para optimizar las motocicletas A no fabricaríamos las motocicletas B: $(320 \cdot 3)/200 = 4,8 \Longrightarrow$ se fabricarían 16 motocicletas A.