Problemas de Matemáticas II
Probabilidad (PAU 2018-2019)

Isaac Musat Hervás

7 de febrero de 2020

Índice

Teoría

Frecuencia absoluta de un suceso A es el número de veces que se repite dicho suceso $\Longrightarrow f(A)$

Frecuencia relativa de un suceso A es la proporción de veces que ha sucedido A de N experiencias $\Longrightarrow f_r(A) = \dfrac{f(A)}{N}$

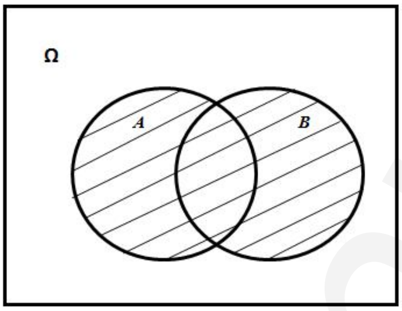
Ley de los grandes números: $\lim\limits_{N \longrightarrow \infty} f_r(A) = P(A)$

Ley de Laplace: $P(A) = \dfrac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

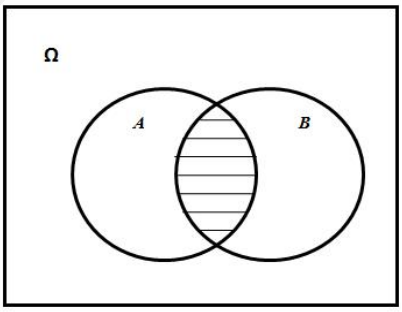
$\Omega \equiv$ **Espacio muestral** es el de todos los sucesos, sería el suceso seguro: $P(\Omega) = 1$.

$\emptyset \equiv$ **Espacio vacio** es el de ningún suceso, sería el suceso imposible: $P(\emptyset) = 0$.

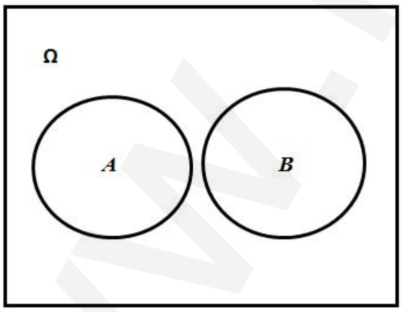
Diagramas de Venn: (esquemas usados en la teoría de conjuntos)



Unión de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos del conjunto A con todos los de B: $A \cup B$



Intersección de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos comunes entre los conjuntos A y B: $A \cap B$



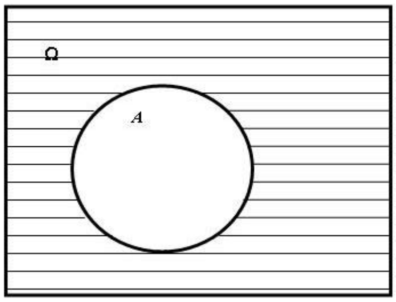
Sucesos Incompatibles: Dos sucesos son incompatibles si su intersección es vacía. $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En el caso de que los dos sucesos sean incompatibles la fórmula quedaría:

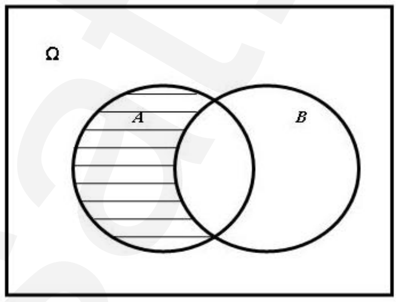
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sucesos independientes: Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.



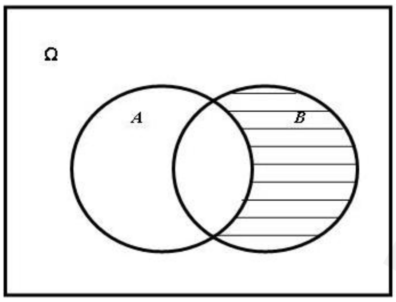
$\overline{A}$ es el suceso contrario o complementario de A:

$$\overline{A} = \Omega - A \Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$



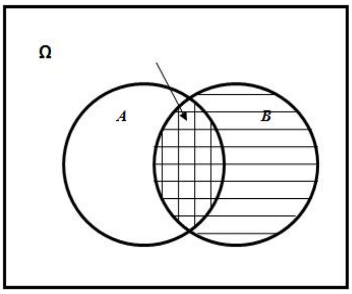
Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Probabilidad condicionada: es la probabilidad de que ocurra un suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Teorema de Bayes: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

Teorema de la probabilidad total: Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$ y los sucesos A_i con $i = 1, ..., 5$ son incompatibles dos a dos (intersección vacía), entonces:

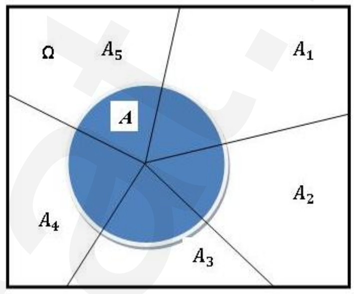
$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$



Probabilidad condicionada:

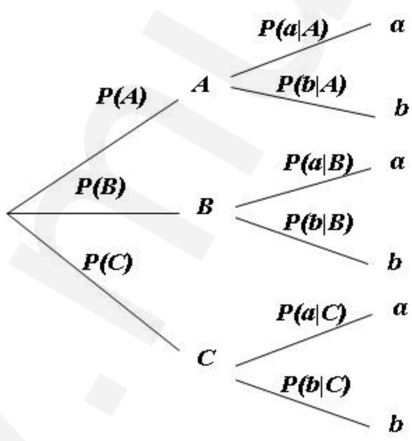
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

probabilidad total



$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$

Organización por árboles:



Organización por tablas de contingencia:

	Renault	Seat	Mercedes	Totales
Blanco	15	20	10	45
Negro	300	455	200	955
	315	475	210	1000

$$P(B|S) = \frac{20}{475}, \;\; P(N|M) = \frac{200}{210}, \;\; P(B) = \frac{45}{1000}, \;\; P(M) = \frac{210}{1000}$$

Problemas

1. Aragón

1.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.1 Se dispone de dos cajas, la caja A contiene 3 bolas moradas y 2 bolas rojas; mientras que la caja B contiene 4 bolas moradas y 4 rojas.

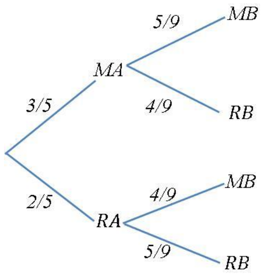
a) Se escoge una bola cualquiera de la caja A y se pasa a la caja B. Posteriormente se saca una bola de la caja B. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la caja B sea morada?

b) Ahora volvemos a la situación original de las cajas; la A contiene 3 moradas y 2 rojas y la B contiene 4 moradas y 4 rojas.
Seleccionamos una caja al azar y se saca una bola que resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea de la caja A?

Solución:

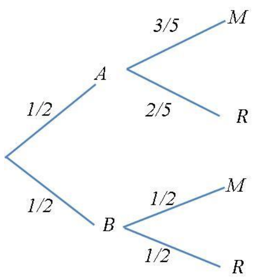
a) Se pasa la bola de la urna A a la B:

$$P(MB) = P(MB|MA)P(MA) + P(MB|RA)P(RA) =$$
$$\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{9}=\frac{23}{45}=0,51$$



b) Se elige una de las dos urnas al azar:

$$P(R) = P(R|A)P(A)+P(R|B)P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{20}=0,45$$
$$P(A|R)=\frac{P(R|A)P(A)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{9}{20}}=\frac{4}{9}=0,44$$



1.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

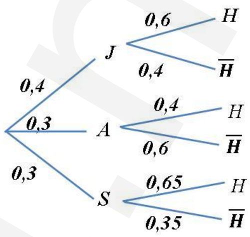
Problema 1.2 Una encuesta realizada sobre el mes preferido, entre julio, agosto o septiembre, para salir de vacaciones arrojó los siguientes datos: un 40 % prefiere julio, un 30 % agosto y el resto prefiere el mes de septiembre. Entre los que prefieren el mes de julio, un 60 % pasa sus vacaciones en un hotel; entre los que prefieren el mes de agosto un 40 % elige hotel para sus vacaciones y entre los encuestados que prefieren septiembre, un 65 % eligen hotel.

a) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que vaya a un hotel y le guste ir en agosto.

b) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que pase sus vacaciones en un hotel.

c) Se elige al azar un individuo y dice que no pasa sus vacaciones en un hotel, calcule la probabilidad de que prefiera irse en agosto de vacaciones.

Solución:



a) $P(A \cap H) = P(H|A)P(A) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$

b) $P(H) = P(H|J)P(J) + P(H|A)P(A) + P(H|S)P(S) = 0,4 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,65 = 0,555$

c)
$$P(A|\overline{H}) = \frac{P(\overline{H}|A)P(A)}{P(\overline{H})} = \frac{0,6 \cdot 0,3}{1 - 0,555} = 0,404$$

2. Asturias

2.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.1 Pedro y Luis son aficionados a los dardos. Pedro acierta en el centro el 10 % de las veces y cada vez que acierta gana 400 euros. Luis acierta en el centro el 20 % de las veces y cada vez que acierta gana 100 euros. Cuando fallan no ganan ni pierden nada. Tira cada uno dos dardos. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Que Luis acierte en el centro las dos veces.

b) Que Pedro acierte en el centro una sola vez.

c) Que entre los dos hayan ganado 600 euros.

Solución:

AL: acierta Luis, FL: falla Luis, AP: acierta Pedro y FP: falla Pedro.
$P(AL) = 0,2$, $P(FL) = 0,8$, $P(AP) = 0,1$ y $P(FP) = 0,9$.

a) $P(AL, AL) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$

b) $P(AP, FP) + P(FP, AP) = 0,1 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,1 = 0,18$

c) Las únicas posibilidades se sumar 600 euros serían los sucesos:

$\{AP, FP, AL, AL\}$ y $\{FP, AP, AL, AL\}$.

$P = P(AP, FP, AL, AL) + P(FP, AP, AL, AL) = 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,0072$

2.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.2 Alicia tiene dos cajones. En uno tiene las camisetas y en el otro las faldas. La tabla muestra el número de todas las prendas que guarda en los dos cajones agrupadas en tres tipos: lisas, dibujos o rayas.

	Lisas	Dibujos	Rayas
Camisetas	10	5	10
Faldas	5	15	5

Se elige al azar una prenda de cada cajón. Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos sean de rayas.

b) Las dos sean del mismo tipo.

c) Al menos una de ellas no sea de rayas.

Solución:

	Lisas	Dibujos	Rayas	Total
Camisetas	10	5	10	25
Faldas	5	15	5	25
Total	15	20	15	50

a) $P(RR) = \frac{10}{25} \cdot \frac{5}{25} = \frac{2}{25} = 0,08$

b) $P(LL) + P(DD) + P(RR) = \frac{10}{25} \cdot \frac{5}{25} + \frac{5}{25} \cdot \frac{15}{25} + \frac{10}{25} \cdot \frac{5}{25} = \frac{7}{25} = 0,28$

c)
$$P = 1 - P(RR) = 1 - 0,08 = \frac{13}{25} = 0,92$$

3. Islas Baleares

3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.1 En una comunidad de 500 alumnos de segundo de Bachillerato, 200 estudiantes eligieron la opción científico tecnológica. Hay 150 alumnos que juegan al fútbol y 100 al baloncesto (se entiende que si juegan al futbol no lo hacen al baloncesto y viceversa) De los que practican baloncesto 70 estudian la opción científico tecnológica y hay 150 estudiantes que no practican ningún deporte y no eligieron la opción científico tecnológica. Se pide:

a) Probabilidad de que un estudiante sea de la opción científico tecnológica y no practique deporte.

b) Sabemos que un estudiante practica futbol, ¿cuál es la probabilidad de que estudie la opción científico tecnológica?

c) Sn independientes los sucesos "practicar futbol" y estudiar la "opción científico tecnológica". Razona la respuesta.

Solución:
$P(CN) = \frac{200}{500} = 0,4$, $P(F) = \frac{150}{500} = 0,3$, $P(B) = \frac{100}{500} = 0,2$, $P(CN|B) = \frac{70}{100} = 0,7$ y $P(N \cap \overline{CN}) = \frac{150}{500} = 0,3$
$P(CN|B) = \frac{P(CN \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(CN \cap B) = P(CN|B)P(B) = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14$

	F	B	N	Total
CN		$0,14$		$0,4$
$\overline{CN}$			$0,3$	
	$0,3$	$0,2$		

$\Longrightarrow$

	F	B	N	Total
CN	$0,06$	$0,14$	$0,2$	$0,4$
$\overline{CN}$	$0,24$	$0,06$	$0,3$	$0,6$
	$0,3$	$0,2$	$0,5$	

a) $P(CN \cap N) = 0,2$

b) $P(CN|F) = \frac{P(CN \cap F)}{P(F)} = \frac{0,06}{0,3} = 0,2$

c) $P(F \cap CN) = 0,06$ y $P(F) \cdot P(CN) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$ luego F y CN no son independientes.

3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.2 Se ha efectuado un estudio para valorar el nivel de estrés de cierta comunidad. Se ha detectado que el 60 % no tiene miedo a volar, el 50 % tiene un nivel bajo de estrés, el 25 % un nivel medio y el 5 % u nivel alto de estrés y miedo a volar. Sabemos, mes a mes, que el 5 % de los individuos tienen un nivel medio de estrés y no tienen miedo a volar. Se pide:

a) Probabilidad de que un individuo de la comunidad tenga un nivel medio de estrés y miedo a volar.

b) Sabemos que un individuo tiene miedo a volar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un nivel bajo de estrés?

c) Sn independientes los sucesos "nivel bajo de estrés" y "miedo a volar". Razona la respuesta.

Solución:
A: miedo a volar, B: estres bajo, C: estres medio y D: estres alto.
$P(A) = 0,4$, $P(\overline{A}) = 0,6$, $P(B) = 0,5$, $P(C) = 0,25$, $P(D \cap A) = 0,05$ y $P(C \cap \overline{A}) = 0,05$

	B	C	D	Total
A			$0,05$	$0,4$
$\overline{A}$		$0,05$		$0,6$
	$0,5$	$0,25$		

$\Longrightarrow$

	B	C	D	Total
A	$0,15$	$0,20$	$0,05$	$0,4$
$\overline{A}$	$0,35$	$0,05$	$0,20$	$0,6$
	$0,5$	$0,25$	$0,25$	

a) $P(C \cap A) = 0,20$

b) $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,15}{0,4} = 0,375$

c) $P(B \cap A) = 0,15$ y $P(B) \cdot P(A) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$ luego B y A no son independientes.

4. Islas Canarias

4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.1 Una planta ensambladora de circuitos recibe componentes procedentes de tres fabricantes A, B y C. El 50 % del total de los componentes se compra al fabricante A, mientras que a los fabricantes B y C se le compra un 25 % a cada uno. El porcentaje de componentes defectuosos es de un 5 % para el fabricante A, el 10 % para el fabricante B y el 12 % para el fabricante C.

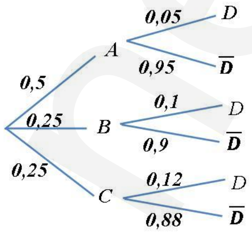
a) Construir el diagrama de árbol con las probabilidades asignadas.

b) El Departamento de Control de la Calidad escoge un circuito al azar en el almacén, hallar la probabilidad de que contenga componentes defectuosos.

c) Escogido al azar un circuito que no tiene componentes defectuosos, ¿qué porcentaje de dichos componentes han sido vendidos por el proveedor B?

Solución:

a) diagrama de árbol:



b) $P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) = 0,05 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,25 + 0,12 \cdot 0,25 = 0,08$

c)
$$P(B|\overline{D}) = \frac{P(\overline{D}|B)P(B)}{P(\overline{D})} = \frac{0,9 \cdot 0,25}{1 - 0,08} = 0,245$$

4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.2 En un supermercado se sabe que el 55 % de los clientes traen su propia bolsa. El 30 % de los que traen su propia bolsa son hombres y el 40 % de los que no traen su propia bolsa son mujeres.

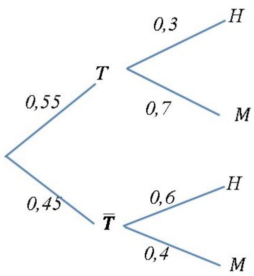
a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado.

b) ¿Qué proporción de clientes son mujeres?

c) Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa?

Solución:

a) diagrama de árbol:



b) $P(M) = P(M|T)P(T) + P(M|\overline{T})P(\overline{T}) = 0,7 \cdot 0,55 + 0,4 \cdot 0,45 = 0,565$

c)
$$P(T|H) = \frac{P(H|T)P(T)}{P(H)} = \frac{0,3 \cdot 0,55}{1 - 0,565} = 0,379$$

5. Cantabria

5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.1 Una prueba rápida para detectar una enfermedad da un 2 % de falsos positivos (personas sanas en las que la prueba da positivo, clasificándolas como enfermas) y un 1 % de falsos negativos (personas enfermas en las que la prueba da negativo, clasificándolas como sanas). En una población hay un 4 % de enfermos.

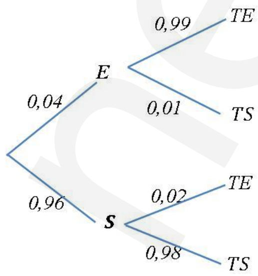
a) Calcule la probabilidad de que el test dé un resultado negativo.

b) La prueba da un resultado positivo (clasificando a la persona como enferma). Calcule la probabilidad de que realmente esté sana.

Solución:

a) $P(TS) = P(TS|E)P(E) + P(TS|S)P(S) = 0,01 \cdot 0,04 + 0,98 \cdot 0,96 = 0,941$

b)
$$P(S|TE) = \frac{P(TE|S)P(S)}{P(TE)} = \frac{0,02 \cdot 0,96}{1 - 0,941} = 0,327$$



5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.2 Una empresa de teléfonos tiene tres cadenas de producción para un modelo de teléfono. Cada cadena fabrica, respectivamente, un 40 %, 35 % y 25 % de la producción total. La probabilidad de que un teléfono sea defectuoso es del 5 %, 3 % y 2 % respectivamente. Se toma un teléfono al azar.

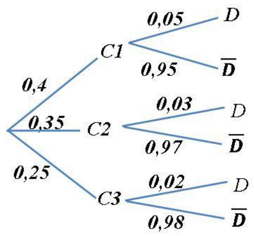
a) ¿Cual es la probabilidad de que el teléfono sea defectuoso?

b) Si el teléfono es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que se haya fabricado en la segunda cadena?

Solución:

a) $P(D) = P(D|C1)P(C1) + P(D|C2)P(C2) + P(D|C3)P(C3) = 0,05 \cdot 0,4 + 0,03 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,25 = 0,0355$

b)
$$P(C2|D) = \frac{P(D|C2)P(C2)}{P(D)} = \frac{0,03 \cdot 0,35}{0,0355} = 0,296$$



6. Castilla León

6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 6.1 En una competición de tiro olímpico hay 10 rifles, 4 con visor telescópico y 6 sin él. La probabilidad de que un tirador haga blanco con un rifle con visor telescópico es 0,95 y sin él es de 0,65.

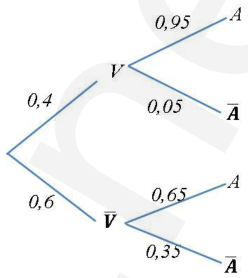
a) Halla la probabilidad de hacer blanco escogiendo un rifle al azar.

b) Si el tirador hace blanco. ¿Es más probable que haya disparado con un rifle con visor telescópico o sin él?

Solución:
LLamamos A al suceso "acertar" y V al suceso "con visor":

a) $P(A) = P(A|V)P(V) + P(A|\overline{V})P(\overline{V}) = 0,95 \cdot 0,4 + 0,65 \cdot 0,6 = 0,77$

b)
$$P(V|A) = \frac{P(A|V)P(V)}{P(A)} = \frac{0,95 \cdot 0,4}{0,77} = 0,494$$
$$P(\overline{V}|A) = \frac{P(A|\overline{V})P(\overline{V})}{P(A)} = \frac{0,65 \cdot 0,6}{0,77} = 0{,}506$$
Sin visor telescópico.



6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 6.2 Se En una empresa de alquiler de vehículos con conductor:

- Trabajan 50 conductores de menos de 45 años, de los cuales 15 hablan inglés.
- Trabajan 30 conductores de entre 45 y 55 años, de los cuales 6 hablan inglés.
- Trabajan 20 conductores de más de 55 años, de los cuales 3 hablan inglés.

Considerando los sucesos: A="tener menos de 45 años", B="tener entre 45 y 55 años", C="tener más de 55 años" e I="hablar inglés":

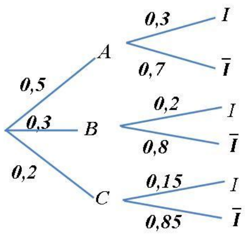
a) Calcular $P(I|A)$, $P(I|B)$ y $P(I|C)$.

b) Si se elige al azar un conductor, y éste habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 45 años?

Solución:

a) $P(I|A) = \frac{15}{50} = 0,3$, $P(I|B) = \frac{6}{30} = 0,2$ y $P(I|C) = \frac{3}{20} = 0,15$

b) $P(I) = P(I|A)P(A) + P(I|B)P(B) + P(I|C)P(C) = 0,5 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,15 = 0,24$
$$P(A|I) = \frac{P(I|A)P(A)}{P(I)} = \frac{0,3 \cdot 0,5}{0,24} = 0,625$$



7. Castilla La Mancha

7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 7.1 Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a) No salga defectuoso.

b) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C.

Solución:
A: fábrica A, B: fábrica B, C: fábrica C y D: defectuoso.
$P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$, $P(C) = 0,5$, $P(D|A) = 0,04$, $P(D|B) = 0,1$ y $P(D|C) = 0,02$

$P(D \cap A) = P(D|A)P(A) = 0,04 \cdot 0,3 = 0,012$; $P(D \cap B) = P(D|B)P(B) = 0,1 \cdot 0,2$ y $P(D \cap C) = P(D|C)P(C) = 0,02 \cdot 0,5$

	A	B	C	Total
D	$0,012$	$0,02$	$0,01$	
$\overline{D}$				
	$0,3$	$0,2$	$0,5$	

$\Longrightarrow$

	A	B	C	Total
D	$0,012$	$0,02$	$0,01$	$0,042$
$\overline{D}$	$0,288$	$0,18$	$0,49$	$0,958$
	$0,3$	$0,2$	$0,5$	

a) $P(\overline{D}) = 0,958$

b)

	$\overline{C}$	C	Total
D	$0,032$	$0,01$	$0,042$
$\overline{D}$	$0,468$	$0,49$	$0,958$
	$0,5$	$0,5$	

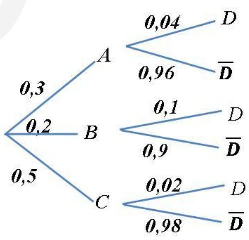
$\Longrightarrow P(\overline{C}|D) = \dfrac{P(\overline{C} \cap D}{P(D)} = \dfrac{0,032}{0,042} = 0,7619$

De otra manera:

a)

$$P(\overline{D}) = P(\overline{D}|A)P(A) + P(\overline{D}|B)P(B) + P(\overline{D}|C)P(C) =$$

$$0,96 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,2 + 0,98 \cdot 0,5 = 0,958$$



b)

$$P(\overline{C}|D) = \frac{P(\overline{C} \cap D)}{P(D)} = \frac{0,3 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,1}{1 - 0,958} = 0,7619$$

Problema 7.2 Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:

a) Se active al menos uno de los dos sensores.

b) Se active sólo uno de los sensores.

Solución:
LLamamos A al suceso "se activa el primer sensor" y B al suceso "se activa el segundo sensor":
$P(A) = 0,98 \Longrightarrow P(\overline{A}) = 0,02$ y $P(B) = 0,96 \Longrightarrow P(\overline{B}) = 0,04$

a) $P(\text{Al menos uno}) = 1 - P(\text{ninguno}) = 1 - 0,02 \cdot 0,04 = 0,9992$

b) $P(\text{uno sólo}) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = 0,98 \cdot 0,04 + 0,02 \cdot 0,96 = 0,058$

7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 7.3 Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son $P(A) = 0,75$ y $P(B) = 0,35$. Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ en cada uno de los siguientes casos:

a) Si A y B fuesen independientes.

b) Si $P(A|B) = 0,6$.

Nota: $P(A|B)$ denota la probabilidad condicionada.
Solución:

a) A y B independientes $\Longrightarrow P(A) \cdot P(B) = 0,75 \cdot 0,35 = 0,2625$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,75 + 0,35 - 0,2625 = 0,838$

b) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,35 = 0,21$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,75 + 0,35 - 0,21 = 0,89$

Problema 7.4 En la sala de pediatría de un hospital el 70 % de los pacientes son niñas. De los niños el 40 % son menores de 36 meses y de las niñas el 30 % tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:

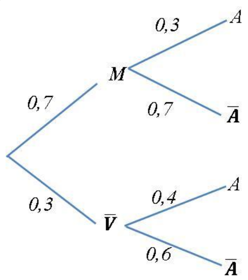
a) Que no tenga menos de 36 meses.

b) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña.

Solución:
LLamamos V al suceso "niño", M al suceso "niña" y A al suceso "menor de 36 meses":

a)

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}|M)P(M) + P(\overline{A}|V)P(V) =$$
$$0,7 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3 = 0,67$$



b)

$$P(M|A) = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,7}{1 - 0,67} = 0,636$$

8. País Vasco

8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

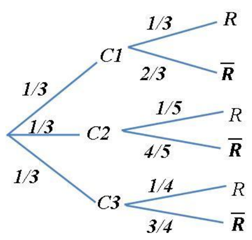
Problema 8.1 Sobre una mesa tengo tres cajas con botones; la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 y la tercera 4. Cada una de las cajas contiene un solo botón rojo. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón rojo?

b) Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de pertenezca a la primera caja?

Solución:
LLamamos V al suceso "botón rojo", $C1$ al suceso "caja primera", $C2$ al suceso "caja segunda" y $C3$ al suceso "caja tercera":
a)

$$P(R) = P(R|C1)P(C1) + P(R|C2)P(C2) + P(R|C3)P(C3) =$$
$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{47}{180} = 0,261$$



b)

$$P(C1|R) = \frac{P(R|C1)P(C1)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{0,261} = 0,426$$

8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 8.2 Una caja tiene 3 monedas R, L y M. La moneda R es normal, la L tiene cara por los dos lados y la M está trucada, de forma que la probabilidad de salir cara es $1/5$. Se tira una moneda elegida al azar.

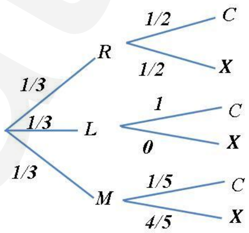
a) Calcular la probabilidad que se obtenga cara.

b) Si ha salido cruz, ¿cuál es la probabilidad que sea la moneda R?

Solución:
LLamamos C al suceso "cara" y X al suceso "cruz":
a)

$$P(C) = P(C|R)P(R) + P(C|L)P(L) + P(C|M)P(M) =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{17}{30} = 0,567$$



b)

$$P(R|X) = \frac{P(X|R)P(R)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{1-0,567} = 0,385$$

9. Extremadura

9.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 9.1 En una clase hay 12 chicas y 8 chicos. 8 de las 12 chicas y 6 de los 8 chicos utilizan Facebook. Se escoge un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:

a) Sea chica y utilice Facebook.

b) Sea chico, sabiendo que utilica Facebook.

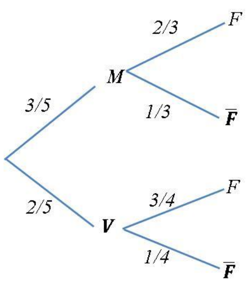
Solución:
LLamamos M al suceso "chica", V al suceso "chico" y F al suceso "Facebook":
a) $P(M\cap F) = P(F|M)P(M) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

b)

$$P(F) = P(F|M)P(M) + P(F|V)P(V) =$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5} = \frac{7}{10} = 0,7$$

$$P(V|F) = \frac{P(F|V)P(V)}{P(F)} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}}{0,7} = 0,429$$



9.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 9.2 Un persona utiliza Whatsapp un 70 % y Telegram un 30 %. El 80 % de los Whatsapp son de amigos y el 20 % de trabajo, mientras que de Telegram, el 80 % son de trabajo y 20 % de amigos.

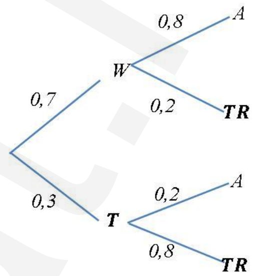
a) Calcule la probabilidad de recibir un mensaje de trabajo.

b) Si el usuario recibe nn mensaje de trabajo, calcule la probabilidad ele que sea a través del Whatsapp.

Solución:
LLamamos W al suceso "Whatsapp", T al suceso "Telegram", A al suceso "amigos" y TR al suceso "trabajo":

a)
$$P(TR) = P(TR|W)P(W) + P(TR|T)P(T) =$$
$$0,2 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot\ 0,3 = 0,38$$

b)
$$P(W|TR) = \frac{P(TR|W)P(W)}{P(TR)} = \frac{0,2 \cdot 0,7}{0,38} = 0,368$$



10. Madrid

10.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 10.1 Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

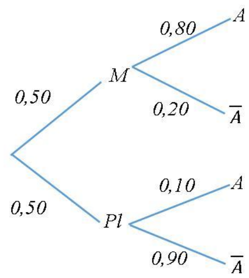
a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

b) (1,5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Solución:
LLamamos M al suceso "Medicamento", Pl al suceso "Placebo" y A al suceso "mejora":

a) $P(A) = P(A|M)P(M) + P(A|Pl)P(Pl) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,1 = 0,45$

b) $P(M|A) = \dfrac{P(A|M)P(M)}{P(A)} = \dfrac{0,8 \cdot 0,5}{0,45} = 0,889$



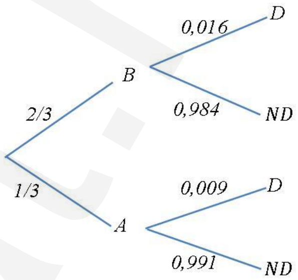
10.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 10.2 Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1,6 %, mientras que para los de alta gama es del 0,9 %. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.

b) (1,5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

Solución:
LLamamos B al suceso "vehículos de baja gama", A al suceso "vehículos de alta gama" y D al suceso "defecto":



a) $P(D) = P(D|B)P(B) + P(D|A)P(A) = 0,016 \cdot \frac{2}{3} + 0,009 \cdot \frac{1}{3} = 0,0137 \Longrightarrow 1,37\,\%$

b) $P(B|D) = \dfrac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \dfrac{0,016 \cdot \frac{2}{3}}{0,0137} = 0,78 \Longrightarrow 78\,\%$

11. La Rioja

11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 11.1 Se tienen tres urnas: A, B y C. La urna A contiene dos bolas blancas y tres negras, la B tres bolas blancas y dos negras, la C cuatro bolas blancas y una negra. Se lanza un dado y se toman dos bolas de una urna: de la urna A si sale un 1, 2 ó 3, de la urna B si sale un 4 ó 5 y de la urna C si sale un 6.

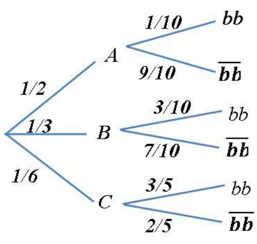
a) Calcula la probabilidad de obtener dos bolas blancas.

b) Suponiendo que las dos bolas extraídas son blancas, calcula la probabilidad de que se hayan extraído de la primera urna.

Solución:
$A = \{2b, 3n\}$, $B = \{3b, 2n\}$ y $C = \{4b, 1n\}$

$P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{1}{3}$ y $P(C) = \dfrac{1}{6}$

$P(bb|A) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{10}$, $P(bb|B) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{10}$ y $P(bb|C) = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{5}$



a) $P(bb) = P(bb|A)P(A) + P(bb|B)P(B) + P(bb|C)P(C) = \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{4} = 0,25$

b)
$$P(A|bb) = \frac{P(bb|A)P(A)}{P(bb)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{5} = 0,2$$

11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 11.2 En un colegio se han ofertado para los niños de infantil tres actividades extraescolares Inglés (ING), Multideporte (MUL) y Robótica (ROB), con dos rangos de edad de 3 a 4 años (MP) y de 5 a 6 años(MG) . Se sabe que se han apuntado a alguna actividad un total de 300 niños. De ellos, hay 100 que tienen entre 3 y 4 años, de los cuales 82 hacen Inglés y 10 han elegido Multideporte. Se sabe que al grupo de Robótica se han apuntado 83 niños, y hay 105 niños de entre 5 y 6 años que se han apuntado a Inglés.

a) Toma un niño al azar, halla las siguientes probabilidades: $P(MG)$, $P(MUL)$, $P(MP \cap ROB)$, $P(ROB|MP)$ y $P(MG|ING)$.

b) Comprueba que el suceso MUL es independiente de la edad del niño.

Solución:
$P(MP) = \dfrac{100}{300} = \dfrac{1}{3} = 0,333 \Longrightarrow P(MG) = \dfrac{2}{3} = 0,667$

$P(ING|MP) = \dfrac{82}{100} = 0,82 \Longrightarrow P(ING \cap MP) = P(ING|MP)P(MP) = 0,82 \cdot 0,333 = 0,273$

$P(MUL|MP) = \dfrac{10}{100} = 0,1 \Longrightarrow P(MUL \cap MP) = P(MUL|MP)P(MP) = 0,1 \cdot 0,333 = 0,033$

$P(ROB) = \dfrac{83}{300} = 0,277$ y

$P(ING|MG) = \dfrac{105}{200} = 0,525 \Longrightarrow P(ING \cap MG) = P(ING|MG)P(MG) = 0,525 \cdot 0,667 = 0,350$

	ING	MUL	ROB	Total
MP	$0,273$	$0,033$		$0,333$
MG	$0,350$			$0,667$
			$0,277$	

$\Longrightarrow$

	ING	MUL	ROB	Total
MP	$0,273$	$0,033$	$0,027$	$0,333$
MG	$0,350$	$0,067$	$0,25$	$0,667$
	$0,623$	$0,1$	$0,277$	

a) $P(MG) = 0,667$, $P(MUL) = 0,1$, $P(MP \cap ROB) = 0,027$

$$P(ROB|MP) = \frac{P(ROB \cap MP)}{P(MP)} = \frac{0,027}{0,333} = 0,081$$

$$P(MG|ING) = \frac{P(MG \cap ING)}{P(ING)} = \frac{0,35}{0,623} = 0,562$$

b) $P(MUL \cap (MG \cup MP)) = 0,1$, $P(MUL) = 0,1$ y $P(MG \cup MP) = 1$, luego $P(MUL \cap (MG \cup MP)) = P(MUL) \cdot P(MG \cup MP) \Longrightarrow$ Los sucesos MUL y edad del niño son independientes.

12. Murcia

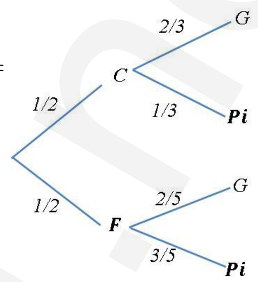
12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 12.1 (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es $\frac{2}{3}$, y la probabilidad de que gane cuando juega fuera es $\frac{2}{5}$.

a) Sin saber dónde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.

b) Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que jugara en casa?

Solución: LLamamos G al suceso "gana", Pi al suceso "pierde", C al suceso "en casa" y F al suceso "fuera de casa":



a) $P(G) = P(G|C)P(C) + P(G|F)P(F) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{8}{15} = 0,533$

b)
$$P(C|G) = \frac{P(G|C)P(C)}{P(G)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{8} = 0,625$$

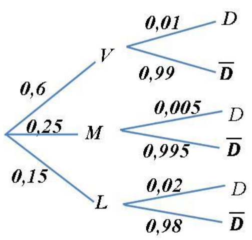
12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 12.2 (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
El 60 % de los coches de una marca se fabrican en su factoría de Valencia, el 25 % en Madrid, y el resto en Lisboa. El 1 % de los coches fabricados en Valencia tiene algún defecto de fabricación, mientras que para los coches fabricados en Madrid y en Lisboa estos porcentajes son del 0,5 % y del 2 %, respectivamente.

a) Elegido al azar un coche de esa marca, calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.

b) Si un coche de esa marca resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en Madrid?

Solución:
LLamamos V al suceso "Valencia", M al suceso "Madrid", L al suceso "Lisboa" y D al suceso "defectuoso":



a) $P(\overline{D}) = P(\overline{D}|V)P(V) + P(\overline{D}|M)P(M) + P(\overline{D}|L)P(L) = 0,99 \cdot 0,6 + 0,995 \cdot 0,25 + 0,98 \cdot 0,15 = 0,98975$

b)
$$P(M|D) = \frac{P(D|M)P(M)}{P(D)} = \frac{0,005 \cdot 0,25}{1 - 0,98975} = 0,122$$

13. Galicia

13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 13.1 El 40 % de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35 % tienen rosas y el 21 % tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcular las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.

Solución:
LLamamos C al suceso "tiene camelias", R al suceso "tiene rosas"
$P(C) = 0,4$, $P(R) = 0,35$ y $P(C \cap R) = 0,21$

- $P(C \cup R) = P(C) + P(R) - P(C \cap R) = 0,4 + 0,35 - 0,21 = 0,54$
- $P(\overline{C} \cap \overline{R}) = P(\overline{C \cup R}) = 1 - P(C \cup R) = 1 - 0,54 = 0,46$
- $P(C|R) = \dfrac{P(C \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0,21}{0,35} = 0,6$
- $P(R|C) = \dfrac{P(R \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,21}{0,4} = 0,525$
- $P(R \cap \overline{C}) + P(C \cap \overline{R}) = P(C \cup R) - P(C \cap R) = 0,54 - 0,21 = 0,33$

Problema 13.2 Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcula $P(A)$ si $P(B) = 0,8$, $P(A \cap B) = 0,2$ y $P(A \cup B)$ es el triple de $P(A)$.

Solución:
$P(A \cup B) = 3P(A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow 2P(A) = 0,8 - 0,2 = 0,6 \Longrightarrow P(A) = \dfrac{0,6}{2} = 0,3$

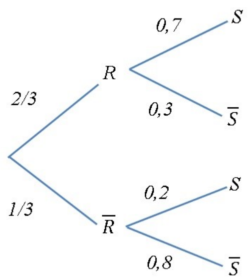
13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 13.3 La probabilidad de que un chico recuerde regar su rosal durante una cierta semana es de 2/3. Si se riega al rosal sobrevive con probabilidad 0,7; si no, lo hace con probabilidad 0,2. Al finalizar la semana, el rosal ha sobrevivido. ¿Cuál es la probabilidad de que el chico no lo haya regado?

Solución:
LLamamos R al suceso "riega el rosal", S al suceso "sobrevive"

$$P(S) = P(S|R)P(R) + P(S|\overline{R})P(\overline{R}) = \frac{2}{3} \cdot 0,7 + \frac{1}{3} \cdot 0,2 = \frac{8}{15} = 0,533$$

$$P(\overline{R}|S) = \frac{P(S|\overline{R})P(\overline{R})}{P(S)} = \frac{0,2 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{8} = 0,125$$



Problema 13.4 Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tal que $P(A) = 0,2$ $P(B) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,5$, Calcula $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$, $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. Razona si A y B son o no sucesos independientes.

Solución:

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,2 = 0,8$
- $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,4 = 0,6$
- $P(A \cap P) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,2 + 0,4 - 0,5 = 0,1$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,1 = 0,9$
- $P(A \cap B) = 0,1 \neq P(A) \cdot P(B) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08 \Longrightarrow A$ y B no son independientes.