Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Abril 2020

Problema 1 (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
La probabilidad de que una flecha dé en la diana es 0,40. Si se lanzan 9 flechas, determine:

a) Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de flechas que dan en la diana.

b) Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución.

c) Cuál es la probabilidad de que al menos 5 flechas den en la diana.

Solución:

a) $B(9; 0,4)$

b) Media$= np = 9 \cdot 0,4 = 3,6$ y la desviación típica$= \sqrt{npq} = \sqrt{9 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 1,47$. Esta distribución no se podría ajustar por una normal.

c) $P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} 0,4^5 \cdot 0,6^4 + \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} 0,4^6 \cdot 0,6^3 + \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} 0,4^7 \cdot 0,6^2 + \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix} 0,4^8 \cdot 0,6^1 + \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} 0,4^9 \cdot 0,6^0 = 0,26656768$

Problema 2 (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Se sabe que el 69,50 % de las bombillas duran menos de 5061,2 horas, y que el 16,60 % de de las bombillas duran más de 5116,4 horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061,2 y 5116,4 horas?

b) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

Solución:

$$N(\mu, \sigma)$$

a) $P(X \leq 5061,2) = 0,6950$ y $P(X \geq 5116,4) = 0,1660 \Longrightarrow P(X \leq 5116,4) = 1 - 0,1660 = 0,834$

   $P(5061,2 \leq X \leq 5116,4) = P(X \leq 5116,4) - P(X \leq 5061,2) = 0,834 - 0,695 = 0,139$

b)
$$P(X \leq 5061,2) = \left(\frac{5061,2-\mu}{\sigma}\right) = 0,6950 \Longrightarrow \frac{5061,2-\mu}{\sigma} = 0,51 \Longrightarrow 0,51\sigma+\mu = 5061,2$$
$$P(X \leq 5116,4) = \left(\frac{5116,4-\mu}{\sigma}\right) = 0,834 \Longrightarrow \frac{5116,4-\mu}{\sigma} = 0,97 \Longrightarrow 0,97\sigma+\mu = 5116,4$$
$$\left\{\begin{array}{l} 0,51\sigma+\mu = 5061,2 \\ 0,97\sigma+\mu = 5116,4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = 5000 \\ \sigma = 120 \end{array}\right.$$

Problema 3 Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale 2 o múltiplo de 2.

a) Si juega 100 veces, calcule la probabilidad de que gane exactamente 10 veces. (En este apartado, NO es necesario finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen).

b) Si juega 200 veces, calcule la probabilidad de que gane entre 90 y 110 veces, ambos valores incluidos.

Solución:
LLamamos G: al suceso "gana". $p = P(G) = \frac{12}{25} = 0,48$, $q = 1 - p = 0,52$.

a) $n = 100$. Se trata de una distribución binomial $B(100; 0,48)$.Tenemos $n = 100 > 10$, $np = 48 > 5$ y $nq = 52 > 5$ la aproximación a una normal cumple todas las condiciones, luego esta distribución binomial se puede aproximar con una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(48, 5)$.
$$P(X = 10) = P\left(\frac{9,5-48}{5} < Z < \frac{10,5-48}{5}\right) = P(-7,7 < Z < -7,5) =$$
$$P(Z < -7,5) - P(Z < -7,7) = 1 - P(Z < 7,5) - (1 - P(Z < 7,7)) = 0$$

b) $n = 200$. Se trata de una distribución binomial $B(200; 0,48)$.Tenemos $n = 200 > 10$, $np = 96 > 5$ y $nq = 104 > 5$ la aproximación a una normal cumple todas las condiciones, luego esta distribución binomial se puede aproximar con una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(96; 7,07)$.
$$P(90 \leq X \leq 110) = P\left(\frac{89,5-96}{7,07} < Z < \frac{110,5-96}{7,07}\right) = P(-0,92 < Z < 2,05) =$$
$$P(Z < 2,05) - P(Z < -0,92) = P(Z < 2,05) - (1 - P(Z < 0,92)) =$$
$$0,9798 - (1 - 0,8212) = 0,801$$

Problema 4 Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tal que $P(A) = 0,2$ $P(B) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,5$, Calcula $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$, $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. Razona si A y B son o no sucesos independientes.

Solución:

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,2 = 0,8$
- $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,4 = 0,6$
- $P(A \cap P) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,2 + 0,4 - 0,5 = 0,1$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,1 = 0,9$
- $P(A \cap B) = 0,1 \neq P(A) \cdot P(B) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08 \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

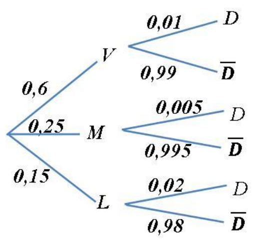
Problema 5 (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
El 60 % de los coches de una marca se fabrican en su factoría de Valencia, el 25 % en Madrid, y el resto en Lisboa. El 1 % de los coches fabricados en Valencia tiene algún defecto de fabricación, mientras que para los coches fabricados en Madrid y en Lisboa estos porcentajes son del 0,5 % y del 2 %, respectivamente.

a) Elegido al azar un coche de esa marca, calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.

b) Si un coche de esa marca resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en Madrid?

Solución:
LLamamos V al suceso "Valencia", M al suceso "Madrid", L al suceso "Lisboa" y D al suceso "defectuoso":

a) $P(\overline{D}) = P(\overline{D}|V)P(V) + P(\overline{D}|M)P(M) + P(\overline{D}|L)P(L) = 0,99 \cdot 0,6 + 0,995 \cdot 0,25 + 0,98 \cdot 0,15 = 0,98975$



b)

$$P(M|D) = \frac{P(D|M)P(M)}{P(D)} = \frac{0,005 \cdot 0,25}{1 - 0,98975} = 0,$$

Problema 6 Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 %

de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a) No salga defectuoso.

b) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C.

Solución:
A: fábrica A, B: fábrica B, C: fábrica C y D: defectuoso.
$P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$, $P(C) = 0,5$, $P(D|A) = 0,04$, $P(D|B) = 0,1$ y $P(D|C) = 0,02$
$P(D\cap A) = P(D|A)P(A) = 0,04\cdot 0,3 = 0,012$; $P(D\cap B) = P(D|B)P(B) = 0,1 \cdot 0,2$ y $P(D \cap C) = P(D|C)P(C) = 0,02 \cdot 0,5$

	A	B	C	Total
D	0,012	0,02	0,01	
$\overline{D}$				
	0,3	0,2	0,5	

$\Longrightarrow$

	A	B	C	Total
D	0,012	0,02	0,01	0,042
$\overline{D}$	0,288	0,18	0,49	0,958
	0,3	0,2	0,5	

a) $P(\overline{D}) = 0,958$

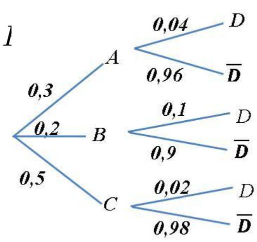
b)

	$\overline{C}$	C	Total
D	0,032	0,01	0,042
$\overline{D}$	0,468	0,49	0,958
	0,5	0,5	

$$\Longrightarrow P(\overline{C}|D) = \frac{P(\overline{C}\cap D}{P(D)} = \frac{0,032}{0,042} = 0,7619$$

De otra manera:
a)

$$P(\overline{D}) = P(\overline{D}|A)P(A)+P(\overline{D}|B)P(B)+P(\overline{D}|C)$$



$$0,96 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,2 + 0,98 \cdot 0,5 = 0,958$$

b)

$$P(\overline{C}|D) = \frac{P(\overline{C}\cap D)}{P(D)} = \frac{0,3 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,1}{1 - 0,958} = 0,7619$$