Problemas de Matemáticas II
Estadística (PAU 2018-2019)

Isaac Musat Hervás

2 de febrero de 2020

Índice

Teoría

Gráficos:

- Varable discreta: con diagrama de barras.

$$x_i,\ \ p(x_i) = p_i,\ \ \sum p_i = 1$$

$$\text{Media} = \mu = \sum x_i p_i,\ \ \text{Varianza} = \sigma^2 = \sum p_i(x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i - \mu^2$$

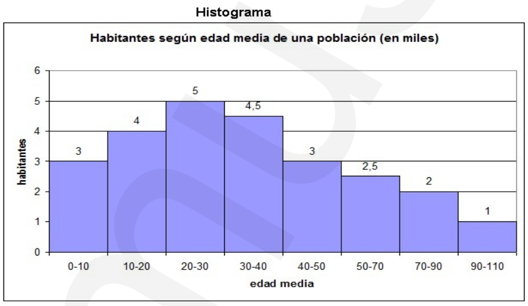
$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

- Variable continua: histogramas (intervalos)

$$x_i,\ \ f_i,$$

$$\text{Media} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum x_i},\ \ \text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i(x_i - \overline{X})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \overline{X}^2$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$



Distribución Binomial $\mathrm{B}(n,p)$:

$$P(X = a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}$$

p es la probabilidad de éxito y $q = 1 - p$ la probabilidad de fracaso. Por ejemplo, si $\mathrm{B}(7, 0, 4) \Longrightarrow n = 7$, $p = 0,4$ y $q = 0,6$:

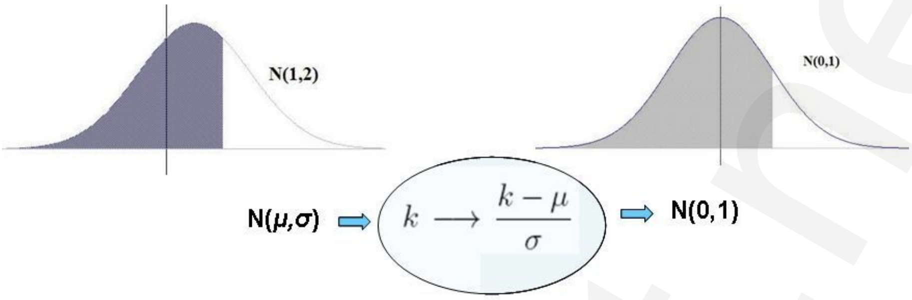
$$P(X = 2) = \binom{7}{2} 0,4^2 0,6^5 = 0,261$$

$$P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3),\ \text{ó}$$

$$P(X \le 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7))$$

Su Media= $\mu = np$, su Varianza= $\sigma^2 = npq$ y su Desviación Típica= $\sqrt{\text{Varianza}}$.
Distribución Normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$:

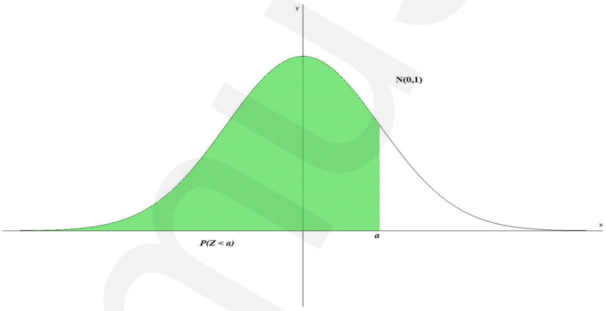
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Tipificación Paso de una normal $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$ a otra $\mathrm{N}(0,1)$: $k \longrightarrow \dfrac{k-\mu}{\sigma}$, si queremos calcular $P(a < X < b)$ y X es de una normal $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$ entoces Z seguirá una normal $\mathrm{N}(0,1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Cuando una distribución binmial $B(n,p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.



$$P(Z > a) = 1 - P(Z < a), \quad P(Z < -a) = 1 - P(Z < a)$$
$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$$

La corrección por continuidad de Yate seguirá las siguientes reglas:
$P(x = a) = P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$
$P(X \leq a) = P(X \leq a + 0,5)$
$P(X < a) = P(X \leq a - 0,5)$
$P(X > a) = P(X \geq a + 0,5)$
$P(X \geq a) = P(X \geq a - 0,5)$
Cálculo de $z_{\alpha/2}$ con un **Nivel de confianza** del 95 %: $NC = 0,95 = 1 - \alpha$ ($\alpha =$**Nivel de significación**)$\Longrightarrow$ $\alpha = 0,05$. Para una distribución bilateral tendremos $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$ se busca en la tabla $N(0,1)$ y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$
Para muestras aleatorias de tamaño n con media $\overline{X}$ de una $N(\mu,\sigma)$ la media $\overline{X}$ se distribuye como una normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Error: $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\overline{X}-E, \overline{X}+E) = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de medias.

Proporciones: Sea $\hat{p}$ proporción de la muestra de tamaño n, se distribuye como una $N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$

Error: $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\hat{p}-E, \hat{p}+E) = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de proporciones.

Problemas

1. Aragón

1.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.1 La probabilidad de que una persona escriba un mensaje de Twitter sin faltas de ortografía es 0,75. Se sabe además que una persona escribe a lo largo del día 20 mensajes de Twitter. A partir de esta información, responde a las siguientes cuestiones.
NO es necesario finalizar los cálculos en ninguna de ellas, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los mensajes escritos en un día, es decir 10, no tengan faltas de ortografía?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún mensaje de los 20 escritos en un día tenga faltas de ortografía?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que 18 o más mensajes de los 20 escritos en un día sí tengan faltas de ortografía?

Solución:
LLamamos S: al suceso "sin faltas de ortografía" luego $p = P(S) = 0,75$, $q = 1 - p = 0,25$ y $n = 20$. Se trata de una distribución binomial $B(20; 0,75)$
Tenemos $n = 20 > 10$, $np = 15 > 5$ y $nq = 5 \not> 5$ la aproximación a una normal no cumple la última condición, aunque sería bastante buena.

a) $P(X = 10) = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} 0,75^{10} 0,25^{10} = 0,01$

b) $P(X = 20) = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} 0,75^{20} 0,25^{0} \simeq 0,00317$

c) La probabilidad de que 18 mensajes o más tengan faltas de ortografía es lo mismo que la probabilidad de que dos menos de dos si tengan faltas de ortografía:

$$P(X \le 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} 0,75^{2} 0,25^{18} +$$
$$\begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} 0,75^{1} 0,25^{19} + \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} 0,75^{0} 0,25^{20} = 1,610715116 \cdot 10^{-9} \simeq 0$$

1.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.2 Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale 2 o múltiplo de 2.

a) Si juega 100 veces, calcule la probabilidad de que gane exactamente 10 veces. (En este apartado, NO es necesario finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen).

b) Si juega 200 veces, calcule la probabilidad de que gane entre 90 y 110 veces, ambos valores incluidos.

Solución:
LLamamos G: al suceso "gana". $p = P(G) = \frac{12}{25} = 0,48$, $q = 1 - p = 0,52$.

a) $n = 100$. Se trata de una distribución binomial $B(100; 0,48)$.Tenemos $n = 100 > 10$, $np = 48 > 5$ y $nq = 52 > 5$ la aproximación a una normal cumple todas las condiciones, luego esta distribución binomial se puede aproximar con una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(48, 5)$.

$$P(X = 10) = P\left(\frac{9,5 - 48}{5} < Z < \frac{10,5 - 48}{5}\right) = P(-7,7 < Z < -7,5) =$$

$$P(Z < -7,5) - P(Z < -7,7) = 1 - P(Z < 7,5) - (1 - P(Z < 7,7)) = 0$$

b) $n = 200$. Se trata de una distribución binomial $B(200; 0,48)$.Tenemos $n = 200 > 10$, $np = 96 > 5$ y $nq = 104 > 5$ la aproximación a una normal cumple todas las condiciones, luego esta distribución binomial se puede aproximar con una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(96; 7,07)$.

$$P(90 \le X \le 110) = P\left(\frac{89,5 - 96}{7,07} < Z < \frac{110,5 - 96}{7,07}\right) = P(-0,92 < Z < 2,05) =$$

$$P(Z < 2,05) - P(Z < -0,92) = P(Z < 2,05) - (1 - P(Z < 0,92)) =$$
$$0,9798 - (1 - 0,8212) = 0,801$$

2. Asturias

2.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.1 Un monitor de tenis compra un cañón para lanzar bolas. En las especificaciones del cañón se indica que falla el lanzamiento el 10 % de la veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 bolas lanzadas, se tengan exactamente 5 fallos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho falle 2 veces de los 20 lanzamientos?

Nota: Se pueden dejar indicadas las operaciones en potencias, sin necesidad de realizarlas.
Solución:
LLamamos F al suceso "fallo" y tenemos $p = P(F) = 0,1$, $q = 1-p = 0,9$ y $n = 20$. Se trata de una distribución binomial $B(20; 0,1)$ que no podemos aproximar por una normal, ya que $np = 2 < 5$.

a) $P(X = 5) = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} 0,1^5 0,9^{15} = 0,032$

b) $P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} 0,1^0 0,9^{20} + \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} 0,1^1 0,9^{19} + \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} 0,1^2 0,9^{18} = 0,677$

2.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.2 Las calificaciones de un examen en una clase siguen una distribución normal de media $\mu = 20$ y desviación típica $\sigma = 10$: Calcula:

a) La probabilidad de que un alumno obtenga una calificación entre 15 y 25.

b) La calificación que sólo superan o igualan el 20 % de los alumnos.

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(x) = P(Z \le x)$, $F(-0,8416) = 0,2$, $F(0,8416) = 0,8$, $F(0,4) = 0,6554$, $F(0,5) = 0,6915$, $F(0,6) = 0,7257$

Solución:

$$N(20, 10)$$

a) $P(15 \le X \le 25) = \left(\frac{15-20}{10} < Z < \frac{25-20}{10}\right) = P(-0,5 < Z < 0,5) = P(Z < 0,5) - P(Z < -0,5) = P(Z < 0,5) - (1 - P(Z < 0,5) = 2P(Z < 0,5) - 1 = 2 \cdot 0,6915 - 1 = 0,383$

b) $P(z > a) = 0,2 \Longrightarrow P(z < a) = 1 - 0,2 = 0,8 \Longrightarrow a = 0,8416$
$a = \dfrac{X - 20}{10} = 0,8416 \Longrightarrow X = 28,416$

3. Islas Baleares

3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 3.1 Las alturas X de los estudiantes de 18 años de un instituto de Palma se puede aproximar por una normal de media $\mu = 1,78$ m y desviación típica $\sigma = 0,65$ m. Se pide:

a) Porcentaje de estudiantes de 18 años del instituto de Palma que miden más de 1,90 m.

b) Tomamos una muestra de 100 estudiantes de 18 años del instituto de Palma y vamos a seleccionar los 30 más altos. ¿Cuál es la altura mínima que ha de tener un estudiante de 18 años del instituto de Palma para ser seleccionado?

Solución:

$$N(1,78; 0,65)$$

a) $P(X \ge 1,9) = \left(Z > \frac{1,9-1,78}{0,65}\right) = P(Z > 0,18) = 1 - P(Z < 0,18) = 1 - 0,5714 = 0,4286$

b) $P(X > a) = 0,3 \Longrightarrow P(X < a) = 1 - 0,3 = 0,7 \Longrightarrow P\left(Z < \dfrac{a - 1,78}{0,65}\right) = 0,7 \Longrightarrow$
$\dfrac{a - 1,78}{0,65} = 0,525 \Longrightarrow a = 2,12$ m.

3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 3.2 El peso de los adultos de 40 años de una cierta comunidad se comporta como una distribución normal de media $\mu = 85$ kg y desviació típica $\sigma = 15$ kg. Se pide:

a) ¿Qué porcentataje de la población tiene sobrepeso? Entendemos que una persona adulta de 40 años tiene sobrepeso si pesa más de 100 kg.

b) Consideramos el colectivo de los individuos más delgados de la comunidad. Si este colectivo representa el 40 % del total de individuos de la comunidad, ¿cuánto pesa el individuo que representa el valor maximo de esta colección?

Solución:

$$N(85; 15)$$

a) $P(X \geq 100) = \left(Z > \frac{100-85}{15}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$

b) $P(X < a) = 0,4 \Longrightarrow P\left(Z \leq \frac{-(a-85)}{15}\right) = 1 - 0,4 = 0,6 \Longrightarrow \dfrac{-(a-85)}{15} = 0,255 \Longrightarrow a = 81,175$ kg.

4. Islas Canarias

4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.1 En un banco se sabe que el tiempo de devolución de un préstamo de 18000 euros sigue una distribución normal de media 60 meses y desviación típica 8 meses. Se elige al azar un préstamo de 18000 euros realizado en dicho banco:

a) Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que fuera devuelto, al menos en 4 años?

c) ¿Qué porcentaje de préstamos de 18000 euros del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años?

Solución:

$$N(60; 8)$$

a) $P(X \leq 70) = \left(Z < \frac{70-60}{8}\right) = P(Z < 1,25) = 0,8944$

b) $P(X \geq 48) = \left(Z > \frac{48-60}{8}\right) = P(Z > -1,5) = 1 - P(Z < -1,5) = 1 - (1 - P(Z < 1,5)) = P(Z < 1,5) = 0,9332$

c) $P(48 \leq X \leq 72) = P\left(\dfrac{48-60}{8} < Z < \dfrac{72-60}{8}\right) = P(-1,5 < Z < 1,5) = P(Z < 1,5) - P(Z < -1,5) = P(Z < 1,5) - (1 - P(Z < 1,5)) = 2P(Z < 1,5) - 1 = 2 \cdot 0,9332 - 1 = 0,8664$

4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.2 Una compañía que fabrica ventiladores de CPU sabe que el tiempo de vida (en meses) de sus ventiladores se distribuye según una normal, de media igual a 18 meses y desviación típica 3,6 meses. Elegido un ventilador al azar:

a) Calcular la probabilidad de que funcione como mucho 16 meses.

b) Calcular la probabilidad de que funcione al menos 1 año.

c) Calcular la probabilidad de que funcione entre 1 y 2 años.

Solución:

$$N(18; 3,6)$$

a) $P(X \leq 16) = \left(Z < \frac{16-18}{3,6}\right) = P(Z < -0,56) = 1 - P(Z < 0,56) = 1 - 0,7123 = 0,2877$

b) $P(X \geq 12) = \left(Z > \frac{12-18}{3,6}\right) = P(Z > -1,67) = 1 - P(Z < -1,67) = 1 - (1 - P(Z < 1,67)) = P(Z < 1,67) = 0,9525$

c) $P(12 \leq X \leq 24) = P\left(\dfrac{12-18}{3,6} < Z < \dfrac{24-18}{3,6}\right) = P(-1,67 < Z < 1,67) = P(Z < 1,67) - P(Z < -1,67) = P(Z < 1,67) - (1 - P(Z < 1,67)) = 2P(Z < 1,67) - 1 = 2 \cdot 0,9525 - 1 = 0,905$

5. Cantabria

5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.1 El peso de una población sigue una distribución normal de media 70 kg y desviación típica de 10 kg.

a) Calcule el porcentaje de población que pesa entre 65 y 75 kg.

b) Calcule el porcentaje de población que pesa al menos 85 kg.

Solución:

$$N(70; 10)$$

a) $P(65 \leq X \leq 75) = P\left(\dfrac{65-70}{10} < Z < \dfrac{75-70}{10}\right) = P(-0,5 < Z < 0,5) = P(Z < 0,5) - P(Z < -0,5) = P(Z < 0,5) - (1 - P(Z < 0,5)) = 2P(Z < 0,5) - 1 = 2 \cdot 0,6915 - 1 = 0,383 \Longrightarrow 38,3\,\%$

b) $P(X \leq 85) = \left(Z < \frac{85-70}{10}\right) = P(Z < 1,5) = 0,9332 \Longrightarrow 93,32\,\%$

5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.2 Las temperaturas de una ciudad durante el verano han seguido una distribución normal de media 30º y desviación típica de 6º.

a) Calcule la probabilidad de que un día al azar se mida una temperatura de menos de 42º.

b) Calcule la probabilidad de que un día al azar haga entre 25º y 30º.

Solución:

$$N(30; 6)$$

a) $P(X \leq 42) = \left(Z < \frac{42-30}{6}\right) = P(Z < 2) = 0,9772$

b) $P(25 \leq X \leq 30) = P\left(\dfrac{25-30}{6} < Z < \dfrac{30-30}{6}\right) = P(-0,83 < Z < 0) = P(Z < 0) - P(Z < -0,83) = P(Z < 0) - (1 - P(Z < 0,83)) = 0,5 - (1 - 0,7967) = 0,2967$

6. Castilla León

6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 6.1 Las notas de Matemáticas II de 500 alumnos presentados al examen de EBAU tienen una distribución normal con media 6,5 y desviación típica 2.

a) Calcule la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de 8 puntos.

b) ¿Cuántos alumnos obtuvieron notas menores de 5 puntos?

Solución:

$$N(6,5;2)$$

a) $P(X \geq 8) = \left(Z > \frac{8-6,5}{2}\right) = P(Z > 0,75) = 1 - P(Z < 0,75) = 1 - 0,7734 = 0,2266$

b) $P(X \leq 5) = P\left(Z < \frac{5-6,5}{2}\right) = P(Z < -0,75) = 1 - P(Z < 0,75) = 1 - 0,7734 = 0,2266$

$nP(X \leq 5) = 500 \cdot 0,2266 = 113,3 \Longrightarrow$ 113 alumnos.

6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 6.2 La temperatura del cuerpo humano sigue una distribución normal de media 37°C y desviación típica 0,5°C.

a) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona esté comprendida entre 36°C y 38°C

b) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona sea menor que 36,5°C.

Solución:

$$N(37;0,5)$$

a) $P(36 \leq X \leq 38) = P\left(\dfrac{36-37}{0,5} < Z < \dfrac{38-37}{0,5}\right) = P(-2 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -2) = P(Z < 2) - (1 - P(Z < 2)) = 2P(Z < 2) - 1 = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544$

b) $P(X \leq 36,5) = \left(Z < \frac{36,5-37}{0,5}\right) = P(Z < -1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$

7. Castilla La Mancha

7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 7.1 En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

a) Tres chicas.

b) Al menos tres chicos.

Solución:
LLamamos A : chica.

$$p = P(A) = \frac{16}{20} = 0,8 \Longrightarrow B(20; 0,8)$$

a) $P(X=3) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right) 0,8^3 0,2^2 = 0,2048$

b) Que haya 3 chicos quiere decir que haya 2 chicas, y que haya 4 chicos quiere decir que haya 1 chica. Esta claro que 5 chicos no puede haber. $P = P(X=1) + P(X=2) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array} \right) 0,8^1 0,2^3 + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right) 0,8^2 0,2^3 = 0,0576$

Problema 7.2 El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10, 2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:

a) Entre 6,5 y 13 horas.

b) En menos de siete horas.

Solución:

$$N(10; 2)$$

a) $P(6,5 \le X \le 13) = P\left(\frac{6,5-10}{2} < Z < \frac{13-10}{2}\right) = P(-1,75 < Z < 1,5) = P(Z < 1,5) - P(Z < -1,75) = P(Z < 1,5) - (1 - P(Z < 1,75)) = 0,9332 - (1 - 0,9599) = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,8931$

b) $P(X \le 7) = \left(Z < \frac{7-10}{2}\right) = P(Z < -1,5) = 1 - P(Z < 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$

7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 7.3 El 1 % de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

a) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima.

b) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos?

Solución:

$$B(5; 0,01)$$

a) $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \end{array} \right) 0,01^0 0,99^5 = 0,049 \simeq 0,05$

b) $B(5; 0,05)$ $P(X \ge 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right) 0,05^3 0,95^2 + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 4 \end{array} \right) 0,05^4 0,95^1 + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array} \right) 0,05^5 0,95^0 \simeq 0,001$

Problema 7.4 En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 items a 450 opositores. Cada item vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:

a) La probabilidad de obtener 75 o más puntos.

b) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos.

Solución:

$$N(60;10)$$

a) $P(X \geq 75) = P\left(Z > \dfrac{75-60}{10}\right) = P(Z > 1,5) = 1 - P(Z < 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$

b) $P(X \leq 75) = \left(Z < \dfrac{75-60}{10}\right) = P(Z < 1,5) = 0,9332$

$450P(X \leq 75) = 450 \cdot 0,9332 = 419,94$ entre 419 y 420 opositores.

8. País Vasco

8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 8.1 Lanzamos un dado de seis caras 6000 veces. Calcular la probabilidad de que el número de veces que salga el 5

a) sea superior a 1500.

b) esté comprendido entre 1000 y 1100.

Solución:

$B(6000;0,167)$, $n = 6000 > 10$, $np = 6000{\cdot}0,167 = 1000 > 5$, $nq = 6000{\cdot}0,833 = 5000 > 5 \Longrightarrow B(6000;0,167) \approx$

a) $P(X > 1500) = P\left(Z > \dfrac{1500,5-1000}{28,87}\right) = P(Z > 17,34) = 1 - P(Z < 17,34) = 1 - 1 = 0$

b) $P(1000 \leq X \leq 1100) = \left(\dfrac{999,5-1000}{28,87} < Z < \dfrac{1100,5-1000}{28,87}\right) = P(-0,02 < Z < 3,48) ==$
$P(Z < 3,48) - P(Z < -0,02) = P(Z < 3,48) - (1 - P(Z < 0,02)) = 1 - 1 + P(Z < 0,02) =$
$0,5080$

8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 8.2 Los resultados obtenidos en una prueba realizada a 500 estudiantes se distribuyen normalmente con media 40 puntos y desviación típica 10 puntos.

a) ¿Qué porcentaje del alumnado tiene una puntuación entre 30 y 60 puntos?

b) ¿Cuántos estudiantes tienen una puntuación superior a 60 puntos?

Solución:

$$N(40;10)$$

a) $P(30 \leq X \leq 60) = \left(\dfrac{30-40}{10} < Z < \dfrac{60-40}{10} \right) = P(-1 < Z < 2) == P(Z < 2) - P(Z < -1) = P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1)) = 0,9772 - 1 + 0,8413 = 0,8185$

b) $P(X \geq 60) = P\left(Z > \dfrac{60-40}{10} \right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$
$500P(X \geq 60) = 500 \cdot 0,0228 = 11,4$ entre 11 y 12 alumnos.

9. Extremadura

9.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 9.1 Supongamos que en una población de Extremadura tienen una estatura que se distribuye según una normal de media 170 cm y desviación típica 10 cm.

a) ¿Qué porcentaje de habitantes miden entre 170 y 185 cm?

b) ¿A partir de qué altura están e 33 % de los habitantes más altos?

Solución:

$$N(170; 10)$$

a) $P(170 \leq X \leq 185) = \left(\dfrac{170-170}{10} < Z < \dfrac{185-170}{10} \right) = P(0 < Z < 1,5) = P(Z < 1,5) - P(Z < 0) = 0,9332 - 0,5 = 0,4332$

b) $P(X > a) = P\left(Z > \dfrac{a-170}{10} \right) = 0,33 \Longrightarrow P\left(Z < \dfrac{a-170}{10} \right) = 1 - 0,33 = 0,67 \Longrightarrow \dfrac{a-170}{10} = 0,44 \Longrightarrow a = 174,4$ cm

9.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 9.2 Se estima que el 40 % de los alumnos que comienzan un grado de ingeniería acaban obteniendo el grado. Si se elige al azar a 5 alumnos que comenzaron una ingeniería, calcule:

a) la probabilidad de que los 5 alumnos obtengan el grado de ingeniero.

b) la probabilidad de que como máximo 2 obtengan el grado de ingeniero.

c) la media y la desviación típica de la distribución.

Solución:

$$B(5; 0,4)$$

a) $P(X = 5) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} 0,4^5 0,6^0 = 0,01024$

b) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} 0,4^0 0,6^5 + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} 0,4^1 0,6^4 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 0,4^2 0,6^3 = 0,68256$

c) media$= np = 5 \cdot 0,4 = 2$ y la desviación típica$= \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 1,095$.

10. Madrid

10.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 10.1 La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

a) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

b) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

Solución:

a) Se trata de una binomial $B(0,1;10)$:

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$

$$1 - \left(\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} 0,1^0 \cdot 0,9^{10} + \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} 0,1^1 \cdot 0,9^9 \right) =$$

$$1 - (0,348678 + 0,387420) = 1 - 0,736098 = 0,263902$$

b) Se trata de una distribución binomial $B(200;0,1)$ con $n = 200$, $p = 0,1$ y $q = 1 - p = 0,9$. Como $np = 200 \cdot 0,1 = 20 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0,9 = 180 > 5$ podemos aproximar esta binomial por una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(20;4,24)$.

$$P(X \geq 10) = P(X > 9,5) = P\left(Z > \frac{9,5 - 20}{4,24}\right) = P(Z > -2,48) =$$

$$1 - P(Z < -2,48) = 1 - (1 - P(Z < 2,48)) = P(z < 2,48) = 0,9934$$

10.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 10.2 Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) Se sabe que el 40 % del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

b) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media $5,6$ y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8,2$ es $0,67$, calcule σ.

Solución:

a) Se trata de una binomial $B(8;0,4)$:

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$

$$1 - \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} 0,4^0 \cdot 0,6^8 + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} 0,4^1 \cdot 0,6^7 \right) =$$

$$1 - (0,6^8 + 8 \cdot 0,4 \cdot 0,6^7) = 0,8936$$

b) Se trata de una distribución normal $N(5,6;\sigma)$

$$P(X \leq 8,2) = P\left(Z \leq \frac{8,2-5,6}{\sigma}\right) = 0,67 \Longrightarrow$$

$$\frac{8,2-5,6}{\sigma} = 0,44 \Longrightarrow \sigma = 5,91$$

11. La Rioja

11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 11.1 La distribución del número de rapes capturados por los barcos pesqueros que salen a faenar en una cierta zona se ajusta a una normal de media 220. Se sabe que, tomando un barco al azar la probabilidad de que capture más de 250 es 0,1587.

a) Calcula la desviación típica de la distribución.

b) Calcula el número de rapes que un barco debe capturar para estar en el percentil 95.

Solución:

$$N(220;\sigma)$$

a) $P(X \geq 250) = \left(Z > \dfrac{250-220}{\sigma}\right) = 1-\left(Z < \dfrac{30}{\sigma}\right) = 0,1587 \Longrightarrow \left(Z < \dfrac{30}{\sigma}\right) = 1-0,1587 = 0,8413 \Longrightarrow \dfrac{30}{\sigma} = 1 \Longrightarrow \sigma = 30$

$$N(220;30)$$

b) $P(X \leq a) = P\left(Z < \dfrac{a-220}{30}\right) = 0,95 \Longrightarrow \dfrac{a-220}{30} = 1,645 \Longrightarrow a = 269,35$. El número de rapes debe de ser de 269.

11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 11.2 El peso medio según la OMS de un niño de 5 años sigue una distribución normal de media 18,5 kg. y desviación típica 2,25 kg. Si se elige un niño al azar. Halla el porcentaje de niños

a) cuyo peso es superior a 23 kg.

b) cuyo peso está entre 15 y 23 kg.

$$N(18,5;2,25)$$

a) $P(X \geq 23) = \left(Z > \dfrac{23-18,5}{2,25}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

b) $P(15 \leq X \leq 23) = \left(\dfrac{15-18,5}{2,25} < Z < \dfrac{23-18,5}{2,25}\right) = P(-1,56 < Z < 2) =$
$= P(Z < 2) - P(Z < -1,56) = P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1,56)) =$

$= 0,9772 - 1 + 0,9406 = 0,9178$

12. Murcia

12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 12.1 (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Se sabe que el 69,50 % de las bombillas duran menos de 5061,2 horas, y que el 16,60 % de de las bombillas duran más de 5116,4 horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061,2 y 5116,4 horas?

b) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

Solución:

$$N(\mu, \sigma)$$

a) $P(X \le 5061,2) = 0,6950$ y $P(X \ge 5116,4) = 0,1660 \Longrightarrow P(X \le 5116,4) = 1 - 0,1660 = 0,834$

$$P(5061,2 \le X \le 5116,4) = P(X \le 5116,4) - P(X \le 5061,2) = 0,834 - 0,695 = 0,139$$

b)

$$P(X \le 5061,2) = \left(\frac{5061,2-\mu}{\sigma}\right) = 0,6950 \Longrightarrow \frac{5061,2-\mu}{\sigma} = 0,51 \Longrightarrow 0,51\sigma + \mu = 5061,2$$

$$P(X \le 5116,4) = \left(\frac{5116,4-\mu}{\sigma}\right) = 0,834 \Longrightarrow \frac{5116,4-\mu}{\sigma} = 0,97 \Longrightarrow 0,97\sigma + \mu = 5116,4$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0,51\sigma + \mu = 5061,2 \\ 0,97\sigma + \mu = 5116,4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = 5000 \\ \sigma = 120 \end{array}\right.$$

12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 12.2 (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).
La probabilidad de que una flecha dé en la diana es 0,40. Si se lanzan 9 flechas, determine:

a) Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de flechas que dan en la diana.

b) Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución.

c) Cuál es la probabilidad de que al menos 5 flechas den en la diana.

Solución:

a) $B(9; 0,4)$

b) Media= $np = 9 \cdot 0,4 = 3,6$ y la desviación típica= $\sqrt{npq} = \sqrt{9 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 1,47$. Esta distribución no se podría ajustar por una normal.

c) $P(X \ge 5) = P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9) = \binom{9}{5} 0,4^5 \cdot 0,6^4 + \binom{9}{6} 0,4^6 \cdot 0,6^3 + \binom{9}{7} 0,4^7 \cdot 0,6^2 + \binom{9}{8} 0,4^8 \cdot 0,6^1 + \binom{9}{9} 0,4^9 \cdot 0,6^0 = 0,26656768$

13. Galicia

13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 13.1 Si en un auditorio hay 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 hayan nacido en el mes de enero?

Solución:
Sea p la probabilidad de que una persona haya nacido en enero: $p = \dfrac{31}{365} = 0,085 \Longrightarrow q = 1 - 0,085 = 0,915$

$$B(50; 0,085)$$

Media$= np = 50 \cdot 0,085 = 4,24$. Esta distribución no se podría ajustar por una normal.
$P(X \geq 2) = 1-(P(X=0)+P(X=1)) = 1-\left(\begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix} 0,085^0 \cdot 0,915^{50} + \begin{pmatrix} 50 \\ 1 \end{pmatrix} 0,085^1 \cdot 0,915^{49}\right) = 1 - 0,934$

Problema 13.2 En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25º C y desviación típica 4º C. Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día esté comprendida entre 21ºC y 27,2ºC. ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

Solución:

$$N(25, 4)$$

$$P(21 \leq X \leq 27,2) = P\left(\frac{21-25}{4} < Z < \frac{27,2-25}{4}\right) = P(-1 < Z < 0,55) =$$

$$P(Z < 0,55) - P(Z < -1) = P(Z < 0,55) - (1 - P(Z < 1)) = 0,7088 - (1 - 0,8413) = 0,5501$$

Como julio tiene 31 días: $31 \cdot P(21 \leq X \leq 27,2) = 31 \cdot 0,5501 = 17,0531 \simeq 17$ días aproximadamente.

13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 13.3 Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm. Y desviación típica 0,01 cm. Calcula la probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7,98 y 8,021 cm.

Solución:

$$N(8; 0,01)$$

$$P(7,98 \leq X \leq 8,021) = P\left(\frac{7,98-8}{0,01} < Z < \frac{8,021-8}{0,01}\right) = P(-2 < Z < 2,1) =$$

$$P(Z < 2,1) - P(Z < -2) = P(Z < 2,1) - (1 - P(Z < 2)) = 0,9821 - (1 - 0,9772) = 0,9593$$

Problema 13.4 La probabilidad de que un determinado jugador de futbol marque gol desde el punto de penalti es $p = 0,7$. Si lanza cinco penaltis calcula las siguientes probabilidades: de que no marque ningún gol; de que marque por lo menos dos goles; y de que marque 5 goles. Si lanza 2100 penaltis, calcula la probabilidad de que marque por lo menos 1450 goles. Se está asumiendo que los lanzamientos son sucesos independientes.

Solución:

$$B(5; 0,7)$$

- $P(X=0) = \binom{5}{0} 0,7^0 \cdot 0,3^5 = 0,00243$

- $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) =$

  $= 1 - \left(\binom{5}{0} 0,7^0 \cdot 0,3^5 + \binom{5}{1} 0,7^1 \cdot 0,3^4 \right) = 0,96922$

- $P(X=5) = \binom{5}{5} 0,7^5 \cdot 0,3^0 = 0,16807$

- Si $n = 2100 > 10$, $np = 2100 \cdot 0,7 = 1470 > 5$ y $nq = 2100 \cdot 0,3 = 630 > 5 \Longrightarrow$

  $B(2100; 0,7) \approx N(np, \sqrt{npq}) = N(1470; 21)$

  $P(X \geq 1450) = P\left(Z > \dfrac{1449,5 - 1470}{21}\right) = P(Z > -0,98) = 1 - P(Z < -0,98) =$
  $= 1 - (1 - P(Z < 0,98)) = P(Z < 0,98) = 0,8365$