

Problemas de Matemáticas II

Análisis (PAU 2018-2019)

Isaac Musat Hervás

31 de enero de 2020

Índice

1. Aragón	8
1.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019	8
1.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019	10
2. Asturias	13
2.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019	13
2.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019	14
3. Islas Baleares	16
3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019	16
3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019	17
4. Islas Canarias	18
4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019	18
4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019	19
5. Cantabria	20
5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019	20
5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019	21
6. Castilla León	23
6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019	23
6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019	24
7. Castilla La Mancha	25
7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2018	25
7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019	28
8. Cataluña	30
8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019	30
8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019	34
9. País Vasco	37
9.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019	37
9.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019	38
10. Extremadura	40
10.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019	40
10.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019	42
11. Madrid	44
11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019	44
11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019	46
12. Valencia	48
12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019	48
12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019	50

13.La Rioja	52
13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019	52
13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019	54
14.Murcia	55
14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019	55
14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019	56
15.Navarra	58
15.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019	58
15.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019	59
16.Galicia	61
16.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019	61
16.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019	63
17.Andalucía	65
17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019	65
17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019	68

Teoría

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u \ln a}$
$y = u^v$	$y' = u^v(v' \ln u) + vu^{v-1}u'$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \tan u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arctan u$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
	Regla de la Cadena	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones

Hay que seguir los siguientes pasos:

1º Dominio	Buscar Puntos Singulares	2º Signo	$f(x) > 0$ o $f(x) < 0$
3º Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x) = 0$ Corte con OY : $x = 0$	4º Simetría :	Par : $f(-x) = f(x)$ con OY Impar : $f(-x) = -f(x)$ con O
5º Asíntotas :	Verticales : $x = p$ $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \pm\infty$ Horizontales : $y = p$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = p$ Si $\exists y = p \Rightarrow$ No Oblicuas Oblicuas : $y = mx + n$ $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$	6ª Monotonía :	Creciente : $f'(x) > 0 \nearrow$ Decreciente : $f'(x) < 0 \searrow$ Si $f'(p) = 0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p) < 0$ Mínimo si $f''(p) > 0$ Pto. Inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$
7ª Máximos y Mínimos	Máximo : $\nearrow \searrow$ de creciente a decreciente Mínimo : $\searrow \nearrow$ de decreciente a creciente	8ª Curvatura :	Cóncava : $f''(x) > 0 \cup$ Convexa : $f''(x) < 0 \cap$ Si $f''(p) = 0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9ª Periodo :	$f(x+T) = f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f' dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x $	$\int \frac{f'}{f} dx = \ln f $
Exponencial	$\int e^x dx = e^x$	$\int e^f \cdot f' dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f' dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2 x dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f dx = \tan f$
	$\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1 + \tan^2 f) dx = \tan f$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2 x dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f dx = -\cot f$
	$\int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1 + \cot^2 f) dx = -\cot f$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$	$\int \frac{f'}{\sin^2 f} dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arcsin f$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}} dx = \arcsin \frac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arccos f$
	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arccos \frac{x}{a}$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{a^2-f^2}} dx = \arccos \frac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \arctan f$
	$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{a^2+f^2} dx = \arctan \frac{f}{a}$
Neperiano – Arcotangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx = \ln \pm \arctan x$	Si $\frac{M \neq 0}{ax^2+bx+c}$ irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \implies$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)

- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \implies$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad

Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a , entonces f tiene que ser continua en a .

Teorema de Weierstrass

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.

Teorema de Darboux

Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a, b]$ ($a < b$) y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o biceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abscisas, es decir, $\exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de Rolle

Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) . Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del Valor Medio de Lagrange

Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) . entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt \text{ donde } c \in [a, b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)

Dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea F cualquier función primitiva de f , es decir $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema de integración por partes

Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a, b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du \text{ (sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme)}$$

Teorema del cambio de variable

Sea g una función con derivada g' continua en $[a, b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. Si hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

Límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que $\text{Grado}(P(x)) = n$ y $\text{Grado}(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.
- Si $n > m \Rightarrow L = \text{Signo}\left(\frac{A}{B}\right) \cdot \infty$
- Si $n < m \Rightarrow L = 0$
- Si $n = m \Rightarrow L = \frac{A}{B}$

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} Q(x)(P(x) - 1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ o } \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \rightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$	$\log(1+x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x \ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$	$\arccos x \approx \frac{\pi}{2} - x$

Problemas

1. Aragón

1.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.1 Se pide:

- a) Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$ y (a, b) , donde $a > 0$ y $b > 0$ y además el punto (a, b) , está situado en la curva de ecuación:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + 9$$

De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones determine el rectángulo de área mínima y calcule dicha área mínima.

b) Determine: $\int \frac{1}{9-x^2} dx$

- c) Determine el valor de la constante k para que se verifique que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + kx + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} = 2$$

Solución:

a) $b = f(a) = \frac{1}{a^2} + 9$ y $S(a, b) = a \cdot b \Rightarrow S(a) = a \left(\frac{1}{a^2} + 9 \right) = \frac{1}{a} + 9a = \frac{1+9a^2}{a}$

$$S'(a) = \frac{9a^2 - 1}{a^2} = 0 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{3}$$

	$[0, 1/3)$	$(1/3, \infty)$
$S'(a)$	-	+
$S(a)$	decrece ↘	crece ↗

Luego si $a = \frac{1}{3}$ es un mínimo y $b = f(a) = 18$ El área mínima sería: $S\left(\frac{1}{3}\right) = 6 u^2$

Los vértices del rectángulo serían: $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, $(0, 18)$ y $\left(\frac{1}{3}, 18\right)$

b) $I(x) = \int \frac{1}{9-x^2} dx = - \int \frac{1}{x^2-9} dx$

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x+3)}{x^2-9}$$

$$1 = A(x-3) + B(x+3) \Rightarrow \begin{cases} x=3 \Rightarrow 1=6B \Rightarrow B=1/6 \\ x=-3 \Rightarrow 1=-6A \Rightarrow A=-1/6 \\ \frac{1}{x^2-9} = \frac{-1/6}{x+3} + \frac{1/6}{x-3} \end{cases}$$

$$I(x) = - \int \left(\frac{-1/6}{x+3} + \frac{1/6}{x-3} \right) dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+3} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-3} dx =$$

$$\frac{1}{6} \ln|x+3| - \frac{1}{6} \ln|x-3| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x+3}{x-3} \right| + C$$

- c) $g(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$ luego $f(x) = x^3 + x^2 + kx + 3$ tiene que ser divisible por $(x-1)^2$, es decir $f(1) = 0 \implies f(1) = 5 + k = 0 \implies k = -5$ sólo falta comprobar que el límite es 2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x - 5}{3x^2 - 2x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x + 2}{6x - 2} = \frac{8}{4} = 2$$

Problema 1.2 Considere la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

- a) Determine las asíntotas de la función, si existen.
b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función, si existen.
c) Determine la integral $\int_1^3 f(x) dx$

Solución:

- a) Asíntotas:

- Verticales: en $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0$$

- No hay por haber horizontales.

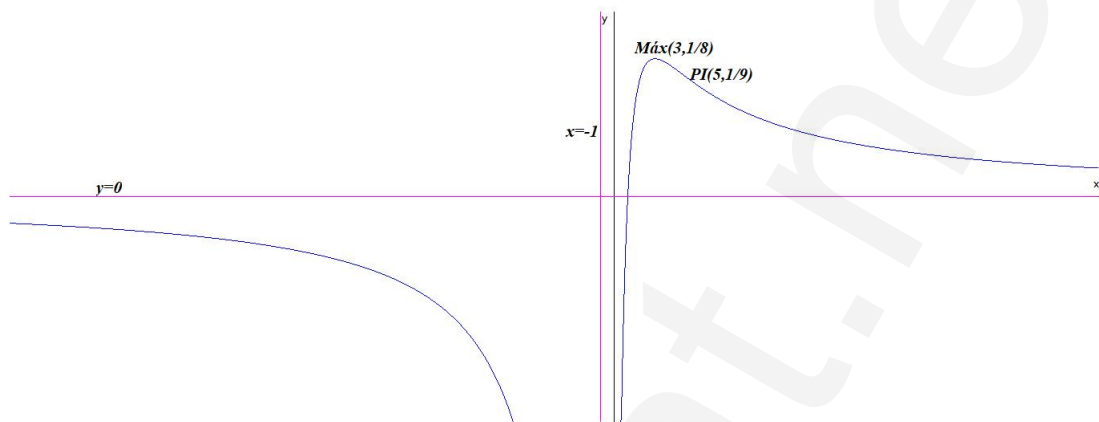
b) $f'(x) = -\frac{x-3}{(x+1)^3} = 0 \implies x = 3.$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decrece ↘	crece ↗	decrece ↘

La función f decrece en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$.

La función f crece en el intervalo $(-1, 3)$.

La función f tiene un máximo en el punto $\left(3, \frac{1}{8}\right)$.



c) $F(x) = \int \frac{x-1}{(x+1)^2} dx$

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1) + B}{(x+1)^2}$$

$$x-1 = A(x+1) + B \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow -1 = A+B \Rightarrow A=1 \\ x=-1 \Rightarrow -2 = B \Rightarrow B=-2 \\ \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2} \end{cases}$$

$$F(x) = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2} \right) dx =$$

$$\ln|x+1| - 2 \int (x+1)^{-2} dx = \ln|x+1| - 2 \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1}$$

$$\int_1^3 f(x) dx = F(3) - F(1) = \frac{1}{2} + 2 \ln 2 - (1 + \ln 2) = -\frac{1}{2} + \ln 2 \simeq 0,193$$

1.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.3 Se pide:

a) Determine el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\ln((1+x)^2)} - \frac{1}{x} \right)$$

b) Determine el valor de la constante k para que la funcion:

$$\begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k-x & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

sea continua en $x = 1$.

c) La curva $y = x^2 + 1$ divide al rectangulo limitado por los vertices $A(0, 1)$, $B(2, 1)$, $C(0, 5)$ y $D(2, 5)$ en dos partes. Determine el area de cada una de esas dos partes.

Solución:

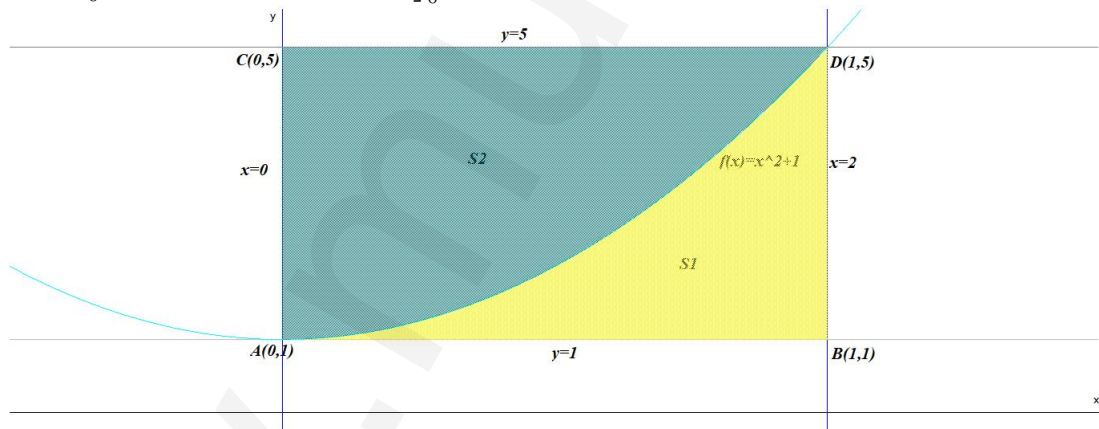
a)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\ln((1+x)^2)} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \ln((1+x)^2)}{x \ln((1+x)^2)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{2(1+x)}{(1+x)^2}}{\ln((1+x)^2) + x \frac{2(1+x)}{(1+x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x}}{\ln((1+x)^2) + \frac{2x}{1+x}} = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(1+x) \ln((1+x)^2) + 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\ln((1+x)^2) + (1+x) \frac{2(1+x)}{(1+x)^2} + 2} = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\ln((1+x)^2) + 4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3}{x} = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} &= f(1) \Rightarrow 4 = k - 1 \Rightarrow k = 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } S_1 &= \int_0^2 (x^2 + 1 - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} u^2 \\ S_2 &= \int_0^2 (5 - x^2 - 1) dx = 4x - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} u^2\end{aligned}$$



Problema 1.4 Se pide:

a) Considere la función:

$$f(x) = \frac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x^2 + 2}$$

Determine el valor de k para que la función $f(x)$ tenga como asíntota oblicua, cuando $x \rightarrow +\infty$, la recta $y = 2x - 1$.

b) Determine: $\int (x(\ln x)^2) dx$.

c) Determine, si existen, los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$$

Solución:

$$a) \quad m = 2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x^3 + 2x} = 2$$

$$n = -1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x^2 + 2} - 2x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx^2 - 3x + 3}{x^2 + 2} = k \implies k = -1.$$

b)

$$\int (x(\ln x)^2) dx = \left[\begin{array}{l} u = (\ln x)^2 \implies du = \frac{2 \ln x}{x} dx \\ dv = x dx \implies v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \int (x \ln x) dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \implies v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \left[\frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} dx \right] = \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + C$$

c)

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) \implies f'(x) = \frac{x-1}{x^2} = 0 \implies x = 1$$

	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decrece ↘	crece ↗

La función f decrece en el intervalo $(0, 1)$.

La función f crece en el intervalo $(1, \infty)$.

La función f tiene un mínimo en el punto $(1, 1)$.

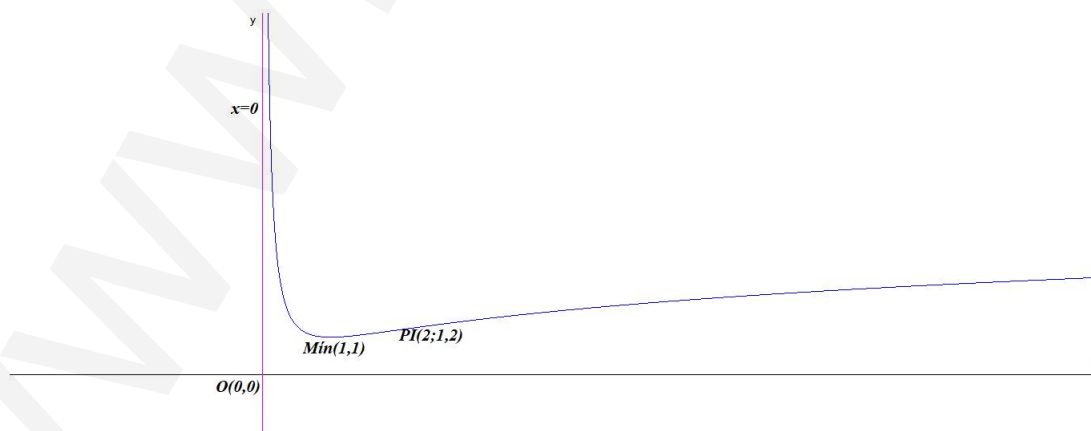
$$f''(x) = \frac{2-x}{x^3} = 0 \implies x = 2$$

	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	cóncava ∪	convexa ∩

La función f convexa en el intervalo $(2, \infty)$.

La función f cóncava en el intervalo $(0, 2)$.

La función f tiene un punto de inflexión en el punto $(2, \frac{1}{2} + \ln 2) = (2; 1, 2)$.



2. Asturias

2.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 2.1 Dada la función $f(x) = \frac{2}{2 + e^x}$

a) Calcula su dominio de definición y sus asíntotas.

b) Mediante el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\int \frac{2}{2 + e^x} dx$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Asíntotas:

- Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
- Horizontales: $y = 0$ e $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2 + e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2 + e^x} = 1$$

- No hay por haber horizontales.

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{2}{2 + e^x} dx &= \left[\begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \\ dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{array} \right] = \int \frac{2}{t(2+t)} dt = \left[\begin{array}{l} \frac{2}{t(2+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2+t} = \frac{A(2+t)+Bt}{t(2+t)} \\ 2 = A(2+t) + Bt \\ t=0 \implies A=1 \\ t=-2 \implies B=-1 \\ \frac{2}{t(2+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2+t} \end{array} \right] = \\ \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{2+t} dt &= \ln|t| - \ln|2+t| + C = \ln|e^x| - \ln|2+e^x| + C = x - \ln|2+e^x| + C \end{aligned}$$

Problema 2.2 Dada la curva $y = \frac{1}{3+x^2}$

- a) Expresa la función $m(x)$ que da la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto x .
- b) Calcula el valor x donde se alcanza la máxima pendiente.

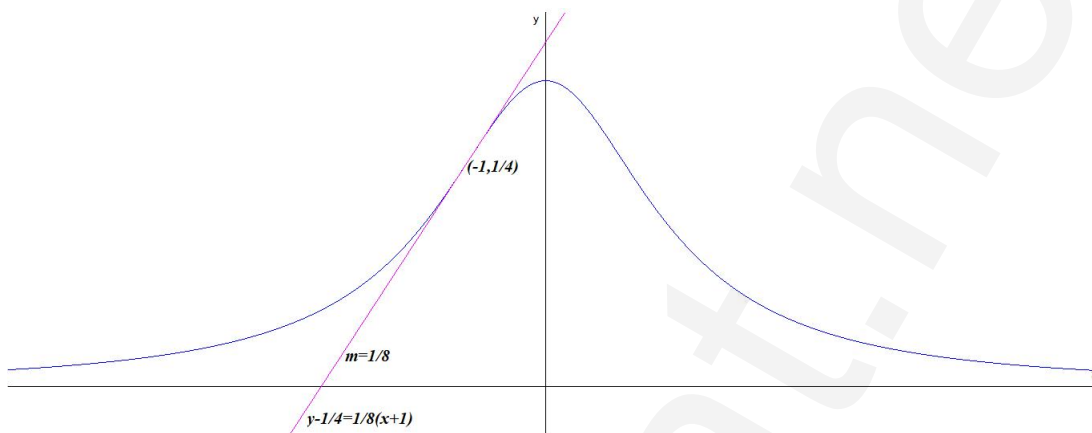
Solución:

$$\text{a) } m(x) = y' = -\frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$\text{b) } m'(x) = \frac{6(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3} = 0 \implies x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$m'(x)$	+	-	+
$m(x)$	crece ↗	decrece ↘	crece ↗

la función m tiene un máximo en el punto $x = -1$ con una pendiente $m(-1) = \frac{1}{8}$



2.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 2.3 Dada la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x+1}$

- Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas.
- Halla, si existen: máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Haz un esbozo de su gráfica.

Solución:

- a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Asíntotas:

- Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^{-x}}{x+1} = \left[\frac{e}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^{-x}}{x+1} = \left[\frac{e}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x+1)e^x} = 0$$

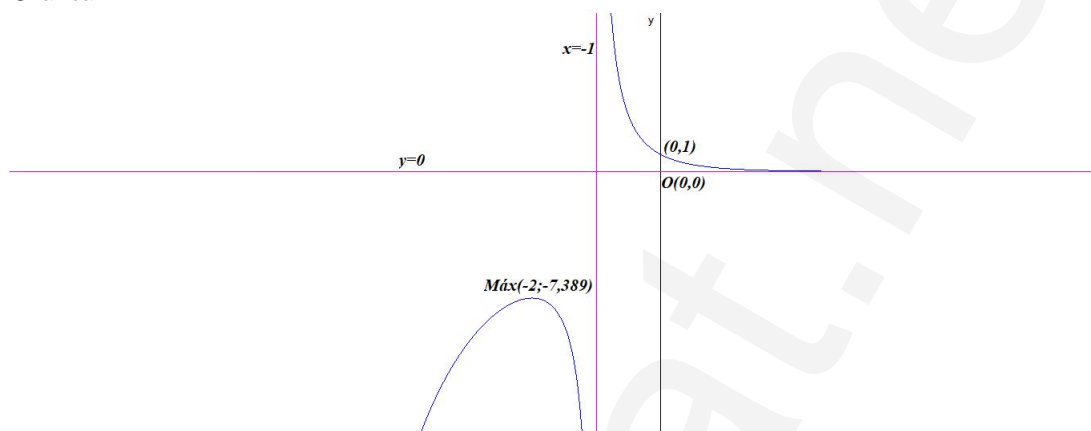
- No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\frac{e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2} \Rightarrow x = -2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	crece ↗	decrece ↘

La función crece en el intervalo $(-\infty, -2)$ y decrece en el intervalo $(-2, \infty)$ con un máximo en el punto $(-2, -e^2) = (-2; -7, 389)$

c) Gráfica:



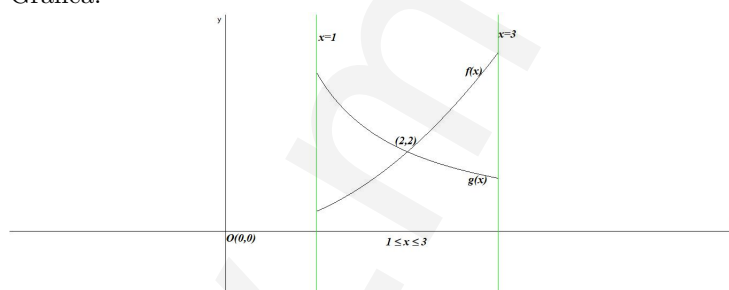
Problema 2.4 Dadas las curvas $y = x^2/2$, $y = 4/x$.

- Calcula sus puntos de corte.
- Esboza una gráfica de las curvas en el intervalo $[1, 3]$.
- Calcula el área que delimitan entre ellas en el intervalo $[1, 3]$.

Solución:

a) $x^2/2 = 4/x \implies \frac{x^3-8}{x} = 0 \implies x = 2$

b) Gráfica:

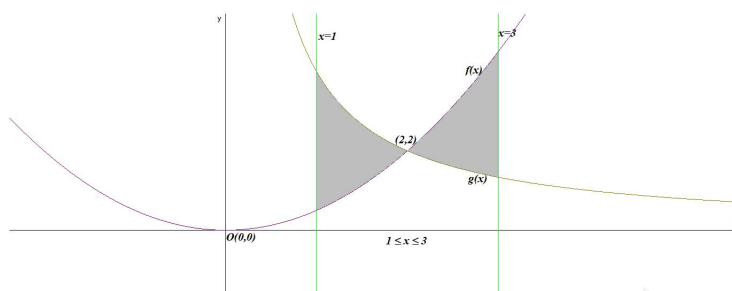


c) Hay dos áreas:

$$S_1 = \int_2^3 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - 4 \ln x \right]_2^3 = \frac{19}{6} - 4 \ln \frac{3}{2} \simeq 1,545$$

$$S_2 = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[4 \ln x - \frac{x^3}{6} \right]_1^2 = -\frac{7}{6} + 4 \ln 2 \simeq 1,606$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{19}{6} - 4 \ln \frac{3}{2} - \frac{7}{6} + 4 \ln 2 = 2 - 4 \ln \frac{3}{4} \simeq 3,151 \text{ u}^2$$



3. Islas Baleares

3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

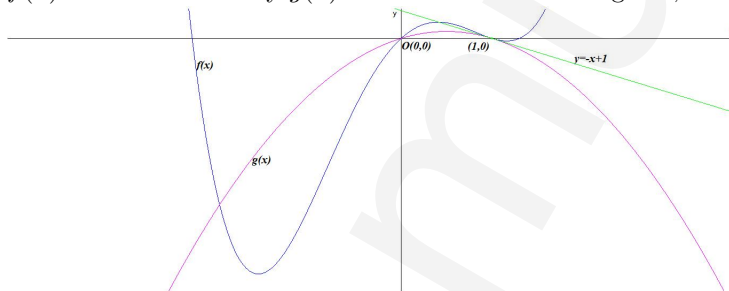
Problema 3.1 Las funciones $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ y $g(x) = x - cx^2$ pasan por el punto $(1,0)$. Determinar los coeficientes a , b y c , para que las dos funciones tengan la misma recta tangente en ese punto.

Solución:

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax + b \quad g'(x) = 1 - 2cx$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \implies a + b + 1 = 0 \\ g(1) = 0 \implies 1 - c = 0 \\ f'(1) = g'(1) \implies 2a + b + 4 = 1 - 2c \end{cases} \implies \begin{cases} a + b = -1 \\ c = 1 \\ 2a + b + 2c = -3 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3x$ y $g(x) = x - x^2$. La recta tangente, común a ambas curvas, es $y = -x + 1$.



Problema 3.2 Consideremos la región delimitada por la función $f(x) = x^2 - x^4$ y el eje de abscisas OX . Esbozar esta región y calcular su área.

Solución:

Se trata de una función PAR $f(-x) = f(x)$, con $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y tiene como puntos de corte con OY el $(0,0)$ y con OX a parte de ese punto $x^2 - x^4 = 0 \implies (\pm 1, 0)$. La función no tiene asíntotas.

Monotonía: $f'(x) = 2x - 4x^3 = 0 \implies x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x = 0$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$	$(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+	-
$f(x)$	crece ↗	decrece ↘	crece ↗	decrece ↘

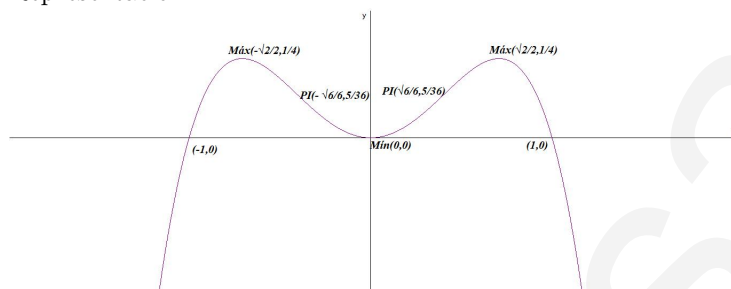
La función crece en el intervalo $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y decrece en $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$. Tiene un mínimo en el punto $(0,0)$ tiene dos máximos en los puntos $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4})$ y $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4})$.

Curvatura: $f''(x) = 2 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \infty\right)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$	convexa $\cup$

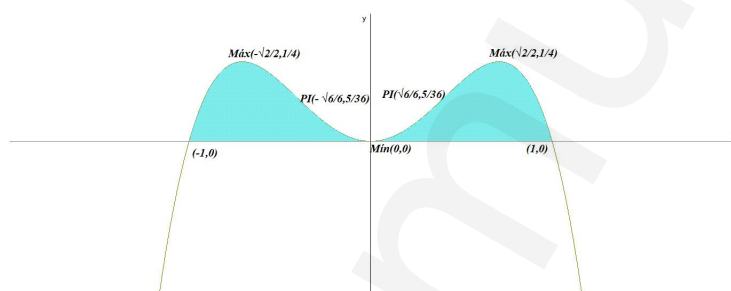
La función es convexa en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \infty\right)$ y cóncava en $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$. Tiene puntos de inflexión en $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{5}{36}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{5}{36}\right)$

Representación:



El área encerrada:

$$S = 2 \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4}{15} u^2$$



3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

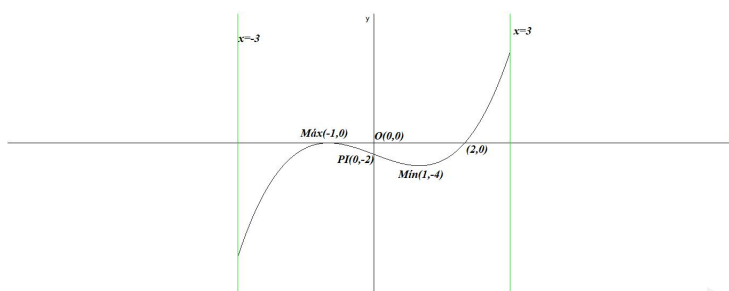
Problema 3.3 Calcular los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^3 - 3x - 2$, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y esboce una gráfica de la función para valores de x entre -3 y 3.

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

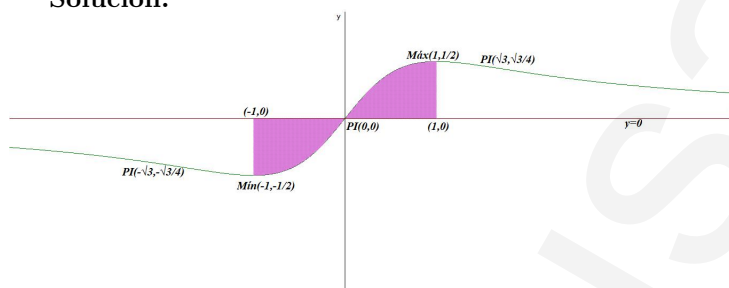
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	crece ↗	decrece ↘	crece ↗

La función crece en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y decrece en $(-1, 1)$. Tiene un mínimo en el punto $(1, -4)$ y un máximo en el punto $(-1, 0)$.



Problema 3.4 Consideremos la región delimitada por función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, el eje de abscisas OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Esbozar esta región y calcular su área.

Solución:



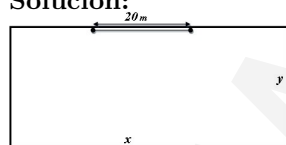
$$S = 2 \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln |1+x^2| \Big|_0^1 = \ln 2 \simeq 0,693 \text{ u}^2$$

4. Islas Canarias

4.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 4.1 Se desea vallar un terreno rectangular usando 100 metros de una tela metálica. Se ha decidido dejar una abertura de 20 metros sin vallar en uno de los lados de la parcela para colocar una puerta. Calcular las dimensiones de todos los lados de la parcela rectangular de área máxima que puede vallarse de esa manera. Calcular el valor de dicha área máxima.

Solución:



Tenemos $2x + 2y = 120 \implies y = 60 - x$

Hay que optimizar la función $s(x, y) = x \cdot y \implies s(x) = x(60 - x) = 60x - x^2$

$s'(x) = 60 - 2x = 0 \implies x = 30$

$s''(x) = -2 \implies s''(30) = -2 < 0 \implies x = 30 \text{ m es un máximo} \implies y = 30 \text{ m y } S(30) = 900 \text{ m}^2$

Problema 4.2 Dada la siguiente expresión de la función f , de la que se desconocen algunos valores:

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} - \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcular los valores de a y b para que f sea derivable en todo su dominio.
Escribir la función resultante.

Solución:

Para que sea derivable tiene que ser continua en $x = 1$:

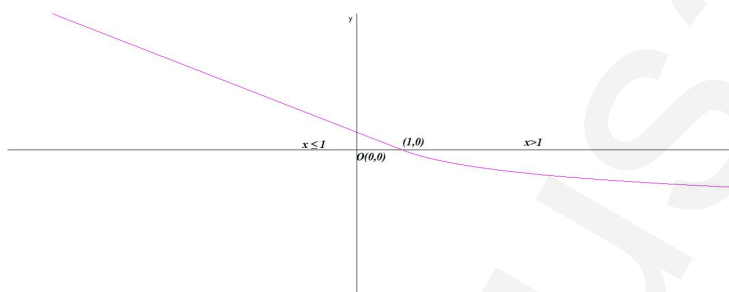
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (a - x) = a - 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{b}{x} - \ln x \right) = b \implies a - 1 = b \implies a - b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{b}{x^2} - \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \implies f'(1^-) = f'(1^+) \implies -1 = -b - 1 \implies b = 0$$

Luego $\begin{cases} a - b = 1 \\ b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ y la función quedaría:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ -\ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



4.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 4.3 Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$

Calcular los valores de a , b y c sabiendo que se cumplen las condiciones siguientes:

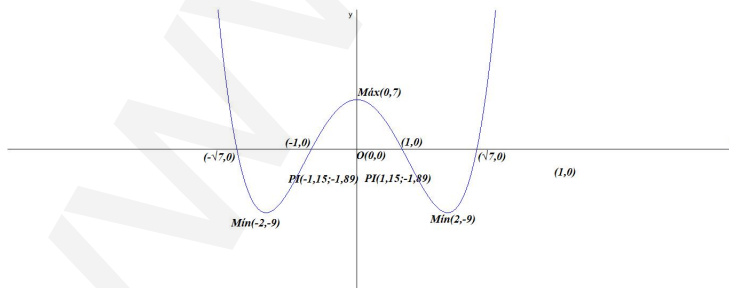
- Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = -2$
- La función corta el eje OX en el punto $x = 1$

Dar la expresión de la función resultante. **Solución:**

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7 \implies f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \implies c = 0 \\ f'(-2) = 0 \implies 12a - 4b + c - 32 = 0 \\ f(1) = 0 \implies a + b + c + 8 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = -8 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$$



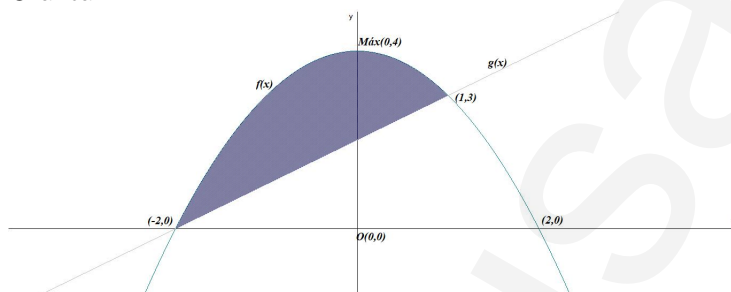
Problema 4.4 Dada la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y la recta de ecuación $y = x + 2$

- Hallar los puntos intersección entre las curvas anteriores.
- Esbozar el gráfico señalando el recinto limitado por ambas curvas.
- Calcular el área del recinto limitado por ambas curvas.

Solución:

- Tenemos $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x + 2$. Hacemos $f(x) = g(x) \Rightarrow 4 - x^2 = x + 2 \Rightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ y $x = 1$.

- Gráfica:



-

$$F(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int (-x^2 - x + 2) dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

$$S_1 = \int_{-2}^1 (f(x) - g(x)) dx = F(1) - F(-2) = \frac{9}{2}$$

$$S = |S_1| = \frac{9}{2} \text{ m}^2$$

5. Cantabria

5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.1 Considere la función $f(x) = (x + 10)e^{2x}$

- Calcule una primitiva $F(x)$ tal que $F(0) = 0$. Use la derivada para comprobar su solución.

- Calcule $\int_0^5 f(x) dx$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } F(x) &= \int (x + 10)e^{2x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x + 10 \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right] = \frac{(x + 10)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \\ &= \frac{(x + 10)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{(2x + 19)e^{2x}}{4} + C \\ F(0) &= 0 \Rightarrow C = -\frac{19}{4} \Rightarrow F(x) = \frac{(2x + 19)e^{2x}}{4} - \frac{19}{4} \end{aligned}$$

$$b) \int_0^5 f(x) dx = F(5) - F(0) = \frac{29e^{10} - 19}{4} \simeq 1,596871270 \cdot 10^5$$

Problema 5.2 Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{a-x^2}{2+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- Determine, si existe, el valor de a que haga a la función continua en $x = 0$.
- Calcule el valor de a para que f tenga un extremo relativo en $x = 2$. ¿Es este extremo un máximo o mínimo local?
- Sea $g(x)$ una función integrable, si $\int_0^3 g(x) dx = 4$ y $\int_2^3 g(x) dx = 6$, ¿Cuánto vale $\int_0^2 g(x) dx$?

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a-x^2}{2+x} = \frac{a}{2} \implies \frac{1}{2} = \frac{a}{2} \implies a = 1$$

$$b) \text{ Como } x = 2 \implies f(x) = \frac{a-x^2}{2+x} \implies f'(x) = -\frac{x^2+4x+a}{(x+2)^2} \text{ como } f'(2) = 0 \implies a = -12.$$

$$c) \text{ Sea } G(x) = \int g(x) dx:$$

$$\int_0^3 g(x) dx = G(3) - G(0) = 4 \text{ y } \int_2^3 g(x) dx = G(3) - G(2) = 6$$

$$\text{Luego: } G(2) - G(0) = \int_0^2 g(x) dx = -2$$

5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.3 Considere la función $f(x) = \frac{x+4}{x^2-7x-8}$

- Estudie el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos de la función f .
- Si g es una función derivable con un máximo relativo en $x = 2$, ¿Cuánto vale $g'(2)$?

Solución:

$$a) \text{ Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 8\}$$

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x+4 = 0 \implies (-4, 0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = -1/2 \implies (0, -1/2)$.

Asíntotas:

- Verticales:
En $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+4}{x^2-7x-8} = \left[\frac{3}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+4}{x^2-7x-8} = \left[\frac{3}{0^-} \right] = -\infty$$

En $x = 8$

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{x+4}{x^2-7x-8} = \left[\frac{12}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{x+4}{x^2-7x-8} = \left[\frac{12}{0^+} \right] = +\infty$$

■ Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{x^2-7x-8} = 0$$

■ No hay por haber horizontales.

$$f'(x) = -\frac{x^2+8x-20}{(x^2-7x-8)^2} = 0 \implies x = 2 \text{ y } x = -10.$$

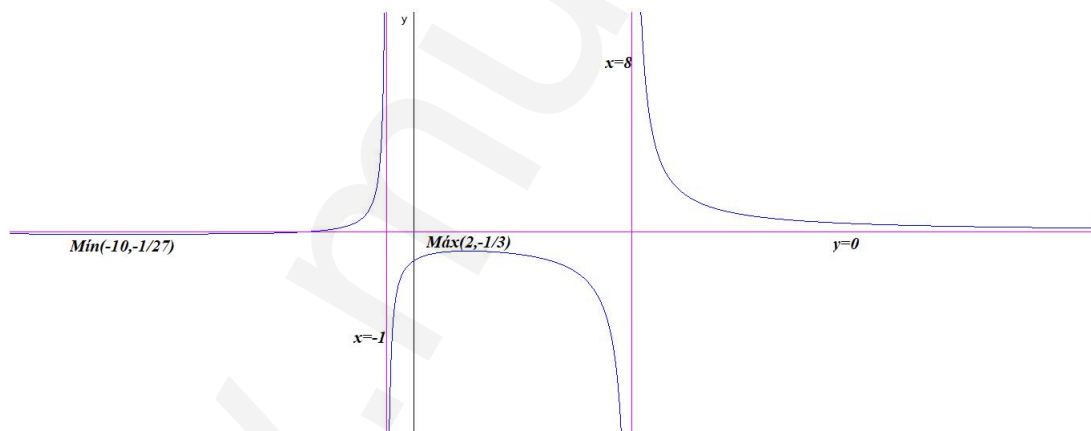
	$(-\infty, -10)$	$(-10, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decrece ↘	crece ↗	decrece ↘

La función f decrece en el intervalo $(-\infty, -10) \cup (2, 8) \cup (8, \infty)$.

La función f crece en el intervalo $(-10, -1) \cup (-1, 2)$.

La función f tiene un máximo en el punto $\left(2, -\frac{1}{3}\right)$.

La función f tiene un mínimo en el punto $\left(-10, -\frac{1}{27}\right)$.



b) $g'(2) = 0$

Problema 5.4 Sea $f(x)$ la función definida en $(0, \infty)$ dada por $f(x) = x \ln(x)$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

b) Calcule $\int_2^e f(x) dx$.

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = [0 \cdot (-\infty)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{+\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$

$$\begin{aligned} \text{b) } F(x) &= \int f(x) dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} = \\ &= \frac{x^2(2 \ln x - 1)}{4} \\ \int_2^e f(x) dx &= F(e) - F(2) = \frac{e^2}{4} + 1 - 2 \ln 2 \simeq 1,461 \end{aligned}$$

6. Castilla León

6.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 6.1 Dada la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, para $x \in \mathbb{R}$.

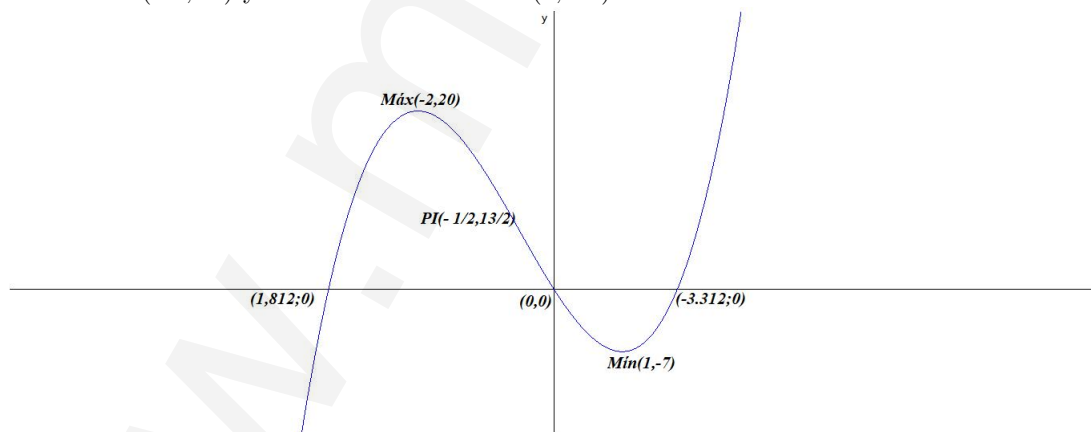
- Calcule sus máximos y mínimos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Calcule el máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-2, 2]$.

Solución:

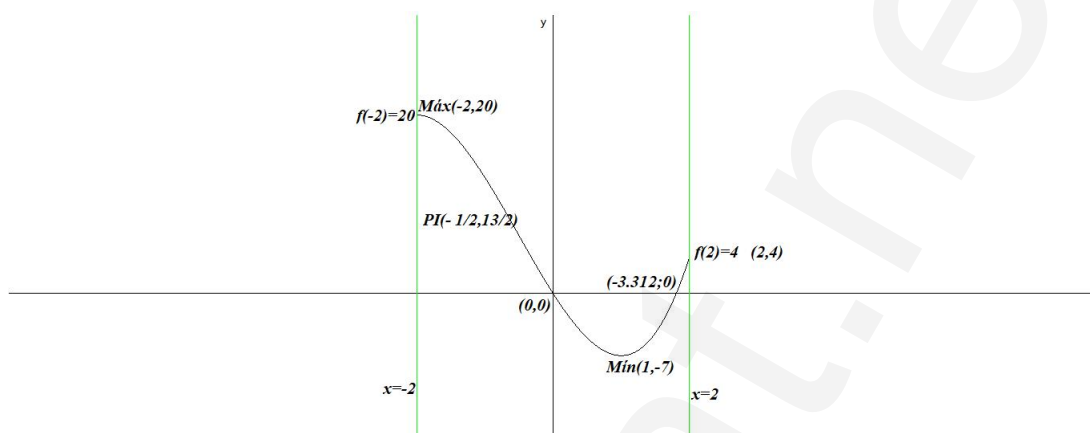
$$\text{a) } f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ y } x = 1.$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función crece en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-2, 1)$. Tiene un máximo relativo en $(-2, 20)$ y un mínimo relativo en $(1, -7)$.



- Calculamos $f(-2) = 20$ y $f(2) = 4$. En el intervalo $[-2, 2]$ el máximo absoluto sería $(-2, 20)$ y el mínimo absoluto sería el $(1, -7)$.



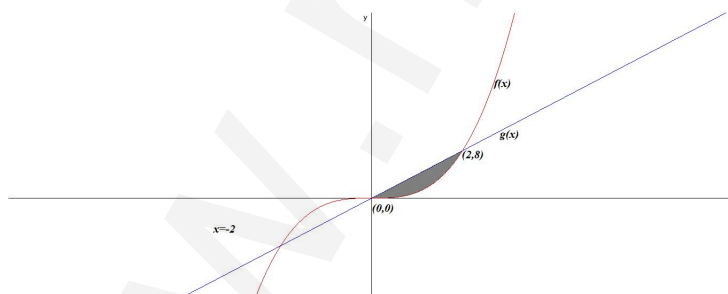
Problema 6.2 Se pide:

- Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \sin x}$
- Calcular el área encerrada por las gráficas de $f(x) = 4x$ y de $g(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 2]$, probando anteriormente que en dicho intervalo $f \geq g$.

Solución:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = -\frac{1}{2}$
- $f(x) = g(x) \Rightarrow 4x = x^3 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = \pm 2$. No hay intersecciones entre las funciones en el intervalo $[0, 2]$, cogemos un valor intermedio en $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$ y $g(1) = 4 \Rightarrow g(x) \geq f(x)$ en $[0, 2]$, ya que las dos funciones son continuas en el intervalo.

$$S = \int_0^2 (4x - x^3) dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 4 u^2$$



6.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

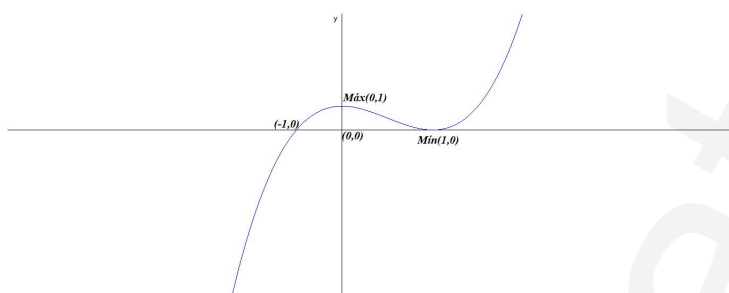
Problema 6.3 Sea el polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ del cual sabemos que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ y que tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 1$. Calcular a , b , c y d .

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \Rightarrow d = 1 \\ f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c + d = 0 \\ f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$



Problema 6.4 Se pide:

- a) Sea $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=2$.
- b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{3 \cos x - 3}$

Solución:

- a) $\frac{2x+3}{x^2+3x+1} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$, que está fuera del intervalo de integración $[0, 2]$.

$$S = \int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+1} dx = \ln |x^2+3x+1| \Big|_0^2 = \ln 11 - \ln 1 = \ln 11$$

- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{3 \cos x - 3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{-3 \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{-3 \cos x} = -\frac{2}{3}$

7. Castilla La Mancha

7.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2018

Problema 7.1 Se pide:

- a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- b) Comprueba si la función $f(x) = x^2 - 4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx + 2) = a + b + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2}) = a - b \end{cases} \implies a + b + 2 = a - b \implies b = -1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{a}{2\sqrt{x}} + \frac{2b}{x^3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(1^-) = 2a + b \\ f'(1^+) = \frac{a}{2} + 2b \end{cases} \implies 2a + b = \frac{a}{2} + 2b \implies 3a - 2b = 0$$

$$\begin{cases} b = -1 \\ 3a - 2b = 0 \end{cases} \implies a = -2/3$$

b) La función $f(x) = x^2 - 4$ es continua en el intervalo $[-3, 3]$, derivable en el intervalo $(-3, 3)$ y $f(3) = f(-3) = 5$. Luego verifica las condiciones del teorema de Rolle y podemos concluir que $\exists c \in [-3, 3] / f'(c) = 0$.

Se puede calcular este punto:

$f'(x) = 2x = 0 \implies x = 0$ y como $f''(x) = 2 \implies f''(0) = 2 > 0 \implies x = 0$ es un mínimo. El punto $c = 0$.

Problema 7.2 Se pide:

- Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, la recta $x = -2$ y el eje de abscisas.
- Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$.

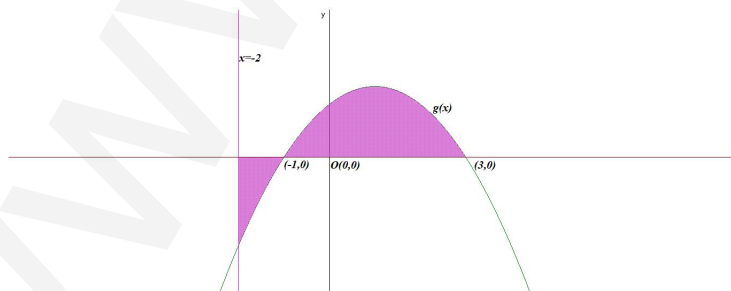
Solución:

- $g(x) = -x^2 + 2x + 3 = 0 \implies x = -1$ y $x = 3$. Luego tenemos dos recintos: S_1 en el intervalo $[-2, -1]$ y otro S_2 en el intervalo $[-1, 3]$.

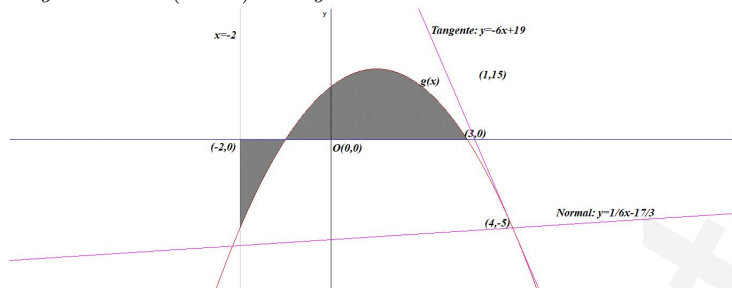
$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (-x^2 + 2x + 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-2}^{-1} = -\frac{7}{3}$$

$$S_2 = \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 = \frac{32}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} = 13 \text{ u}^2$$



- b) $b = g(4) = -5$, $g'(x) = -2x + 2 \Rightarrow m = g'(4) = -6$. Luego la ecuación de la recta tangente es $y + 5 = -6(x - 4) \Rightarrow y = -6x + 19$



La recta normal tiene de ecuación $y + 5 = \frac{1}{6}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{6}x - \frac{17}{3}$

Problema 7.3 Calcula razonadamente los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-e^{x^2-1} - x}{x^2 + 4x + 3}$

Solución:

- a) $L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}} = [1^\infty] = e^\lambda$
- $$\lambda = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2xe^{x-1} - x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$
- $$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2e^{x-1} + 2xe^{x-1} - 2x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow L = e^{1/2}$$
- b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-e^{x^2-1} - x}{x^2 + 4x + 3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2xe^{x^2-1} - 1}{2x + 4} = \frac{1}{2}$

Problema 7.4 Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = \frac{x^2}{2}$ con $x \in \mathbb{R}$.

- a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.
- b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

- a) Estudio de $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)} = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente	decreciente

Hay un máximo en el punto $(0, 1)$.

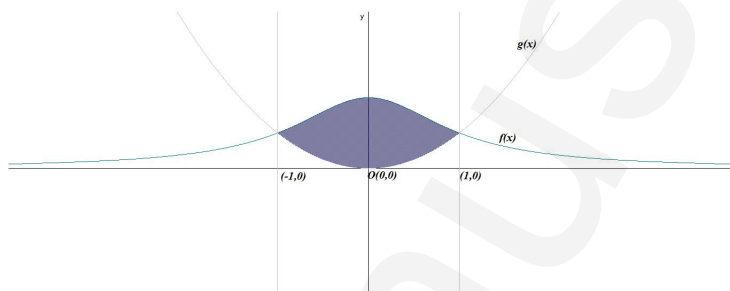
Estudio de $g(x) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow f'(x) = x = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

Hay un mínimo en el punto $(0, 0)$.

$$\text{b) } f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$S = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{-x^4 - x^2 + 2}{2(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(-x^2 + \frac{2}{1+x^2} \right) dx = \left(-\frac{x^3}{6} + \arctan x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{3\pi - 2}{6} \simeq 1,237 \text{ u}^2$$



7.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 7.5 Se pide:

- Estudia la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen.
- Calcula las coordenadas de los extremos relativos de la función $g(x) = xe^{-x}$.

Solución:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, la función es continua en todo el dominio de f . Estudiamos la continuidad en $x = 1$ y en $x = -1$.
Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 2x - 1}{2x} = \frac{3}{2}$$

En este caso la función es discontinua evitable. Tiene un agujero en el punto $(1, \frac{3}{2})$.
Continuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[\frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[\frac{-2}{0^-} \right] = +\infty$$

En este caso la función es discontinua no evitable. Tiene un salto en $x = -1$ que sería una asíntota vertical.

b) $g(x) = xe^{-x} \Rightarrow g'(x) = (1 - x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente	decreciente

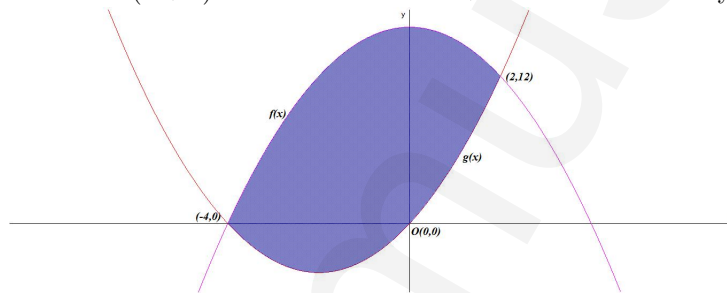
Hay un máximo en el punto $(1, 1/e)$.

Problema 7.6 Se pide:

- Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 16 - x^2$ y $g(x) = (x + 2)^2 - 4$.
- Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 16 - x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

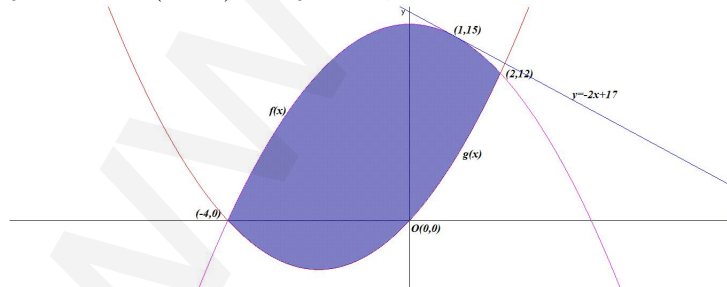
Solución:

a) $16 - x^2 = (x + 2)^2 - 4 \Rightarrow -2x^2 - 4x + 16 = 0 \Rightarrow x = -4$ y $x = 2$.



$$S = \int_{-4}^2 (-2x^2 - 4x + 16) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 16x \right]_{-4}^2 = 72 \text{ u}^2$$

- b) $b = f(1) = 15$, $f'(x) = -2x \Rightarrow m = f'(1) = -2$. Luego la ecuación de la recta tangente es $y - 15 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 17$.



Problema 7.7 Se pide:

- Demuestra que la ecuación $\sin x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, \pi]$.

- b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando $x \in [-200, 200]$.

Solución:

- a) La función $f(x) = \sin x - 2x + 1$ es continua en el intervalo $[0, \pi]$, $f(\pi) = -2\pi + 1 < 0$ y $f(0) = 1 > 0$. Por el teorema de Bolzano $\exists c \in [0, \pi]/f(c) = 0$, por tanto la ecuación dada tiene al menos una solución.
- b) La función $f(x) = \sin x - 2x + 1$ es continua en el intervalo $[-200, 200]$ y derivable en el intervalo $(-200, 200)$.
 $f'(x) = \cos x - 2 < 0 \forall x \in (-200, 200) \implies f$ es decreciente en todo el intervalo y además cambia de signo en los extremos $f(-200) = 401,34$ y $f(200) = -399,34$, luego sólo existe un punto c que cumpla que $f(c) = 0$.

Problema 7.8 Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

Solución:

a) $F(x) = \int (x+1)e^{-x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x+1 \implies du = dx \\ dv = e^{-x} dx \implies v = -e^{-x} \end{array} \right] = -(x+1)e^{-x} + \int e^{-x} dx =$
 $-(x+1)e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+2)$

$$\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx = F(1) - F(0) = 2 - \frac{3}{e} \simeq 0,896$$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \implies x = t^2 \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \implies dx = 2t dt \end{array} \right] = \int \frac{2t}{t(1+t^2)} dt = 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt =$
 $2 \arctan t + C = 2 \arctan \sqrt{x} + C$

8. Cataluña

8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 8.1 Las páginas de un libro deben tener cada una 600 cm^2 de superficie, con márgenes alrededor del texto de 2 cm en la parte inferior, 3 cm en la parte superior y 2 cm en cada lado. Calcule las dimensiones de la página que permiten la mayor superficie impresa posible.

Solución:

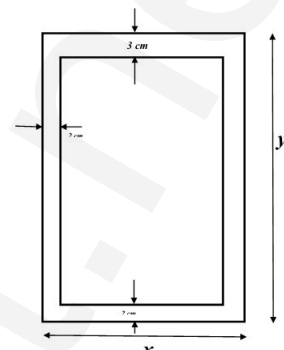
$$xy = 600 \implies y = \frac{600}{x}$$

$$S(x, y) = (x - 4)(y - 5) \implies S(x) = \frac{-5x^2 + 620x - 2400}{x}$$

$$S'(x) = \frac{5(480 - x^2)}{x^2} = 0 \implies x = 21,91, \quad x = -21,91 \text{ no vale}$$

	$(0; 21,91)$	$(21,91; \infty)$
$S'(x)$	+	-
$S(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

Hay un máximo en el punto $x = 21,91 \text{ cm} \implies y = 27,39 \text{ cm}$.



Problema 8.2 Considere la función $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x}$.

- Calcule su dominio y estudie su continuidad. ¿Tiene alguna asíntota vertical?
- Observe que $f(-2) = -\frac{2}{3}$, $f(0) = 4$ y $f(2) = -10$. Razone si, a partir de esta información, puede deducirse que el intervalo $(-2, 0)$ contiene un cero de la función. ¿Puede deducirse para el intervalo $(0, 2)$? Encuentre un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de esta función.

Solución:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

En este caso la función es discontinua no evitable. Tiene un salto en $x = 1$ que sería una asíntota vertical. La función f es continua en $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

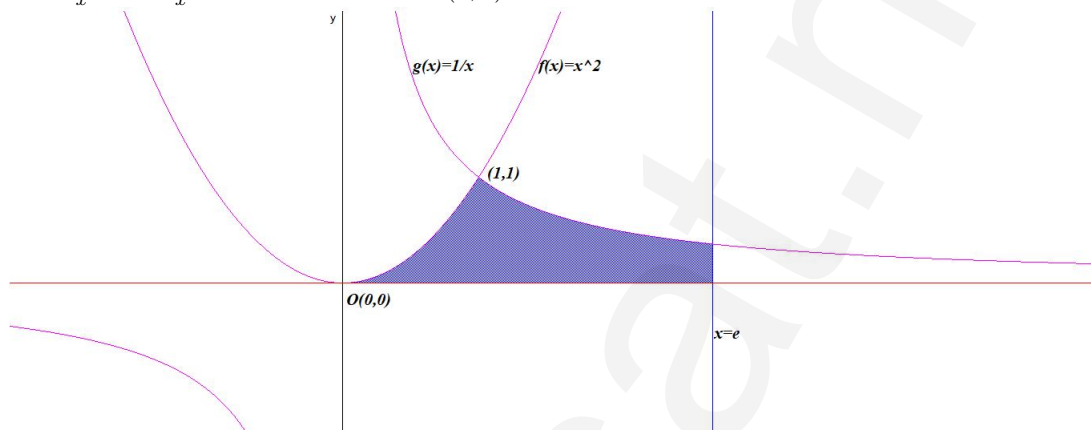
- La función f es continua en el intervalo $(-2, 0)$, $f(-2) = -\frac{2}{3}$ y $f(0) = 4$, la función cambia de signo en los extremos del intervalo. Luego f cumple las condiciones del teorema de Balzano en el intervalo $(-2, 0) \implies \exists c \in (-2, 0)/f(c) = 0$.
En el intervalo $(-2, -1)$ la función es continua y sus extremos son dos enteros consecutivos, además los valores de la función en los extremos del intervalo tienen distinto signo, $f(-2) = -\frac{2}{3}$ y $f(-1) = \frac{7}{2}$. Luego f cumple las condiciones del teorema de Balzano en el intervalo $(-2, -1) \implies \exists c \in (-2, -1)/f(c) = 0$.

Problema 8.3 Considere las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, y la recta $x = e$.

- Haga un esbozo de la región delimitada por sus gráficas y el eje de abscisas. Calcule las coordenadas del punto de intersección de $y = f(x)$ con $y = g(x)$.
- Calcule el área de la región descrita en el apartado anterior.

Solución:

a) $x^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x^3-1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 1)$



b) $S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \ln x \Big|_1^e = \frac{4}{3} u^2.$

Problema 8.4 Quiere construirse un marco rectangular de madera que delimite un área de 2 m^2 . Se sabe que el precio de la madera es de 7,5 euros/m para los lados horizontales y de 12,5 euros/m para los lados verticales. Determine las dimensiones que debe tener el rectángulo para que el coste total del marco sea el mínimo posible. ¿Cuál es este coste mínimo?

Solución:

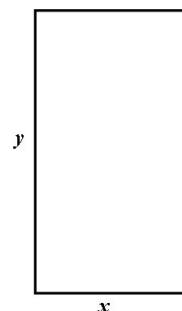
$xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$

$P(x, y) = 2x \cdot 7,5 + 2y \cdot 12,5 \Rightarrow$

$P(x) = 15x + \frac{50}{x} = \frac{15x^2 + 50}{x}$

$P'(x) = \frac{5(3x^2 - 10)}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1,826, \quad x = -1,826 \text{ no vale}$

	$(0; 1,826)$	$(1,826; \infty)$
$P'(x)$	-	+
$P(x)$	decreciente	creciente



Hay un mínimo en el punto $x = 1,826 \text{ m} \Rightarrow y = 1,095$

m. Con un precio de $P(1,826) = 54,77$ euros.

Problema 8.5 Considere la función $f(x)$, que depende de los parámetros reales n y m y está definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} + n & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} + m & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Calcule los valores de n y m para que la función sea continua en todo el conjunto de los números reales.

- b) Para el caso $n = -4$ y $m = -6$, calcule el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

Solución:

- a) Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{4} + n \right) = n \end{cases} \Rightarrow n = 1$$

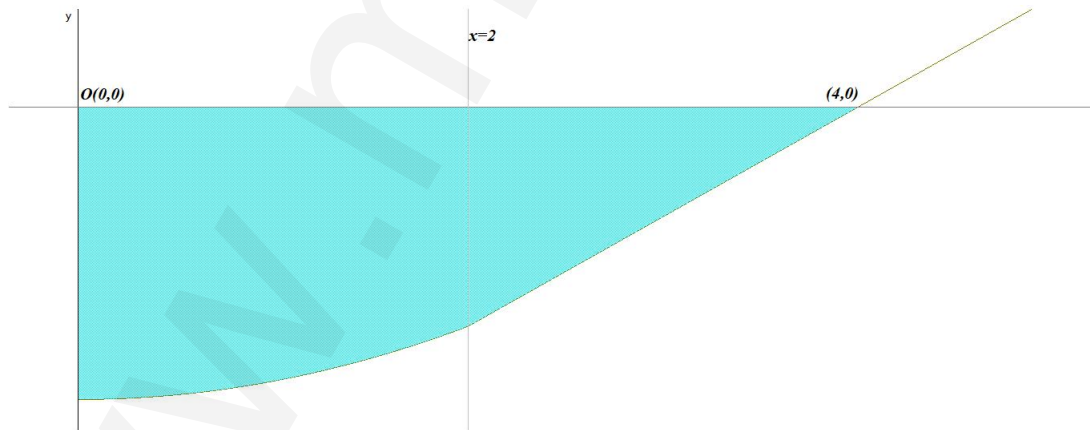
Continuidad en $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x^2}{4} + n \right) = 1 + n \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{3x}{2} + m \right) = 3 + m \end{cases} \Rightarrow 1 + n = 3 + m \Rightarrow m = n - 2 \Rightarrow m = -1$$

- b) Comprobamos la continuidad de la función en $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} - 4 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} - 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x^2}{4} - 4 \right) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{3x}{2} - 6 \right) = -3 \\ f(2) = -3 \end{cases} \Rightarrow f \text{ continua en } x = 2$$



$$S_1 = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} - 4 \right) dx = \left[\frac{x^3}{12} - 4x \right]_0^2 = -\frac{22}{3}$$

$$S_2 = \int_2^4 \left(\frac{3x}{2} - 6 \right) dx = \left[\frac{3x^2}{4} - 6x \right]_2^4 = -3$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{22}{3} + 3 = \frac{31}{3} u^2$$

Problema 8.6 Se sabe que una función $f(x)$ es continua y derivable en todos los números reales, que tiene como segunda derivada $f''(x) = 6x$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es horizontal.

- Determine la abscisa de los puntos de inflexión de la función f y los intervalos de concavidad y convexidad. Justifique que la función f tiene un mínimo relativo en $x = 1$.
- Sabiendo, además, que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 5$, calcule la expresión de la función f .

Solución:

a) $f''(x) = 6x = 0 \implies x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

Hay un punto de inflexión en $x = 0$.

Como hay una tangente en $x = 1$ que es horizontal $f'(1) = 0 \implies x = 1$ es un extremo y como $f''(1) = 6 > 0$ este extremo es un mínimo.

b) $f'(x) = \int 6x dx = 3x^2 + C$ y como $f'(1) = 0 \implies 3 + C = 0 \implies C = -3$. Luego $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$f(x) = \int (3x^2 - 3) dx = x^3 - 3x + C \text{ y } f(1) = 5 \implies -2 + C = 5 \implies C = 7$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 7$$

8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

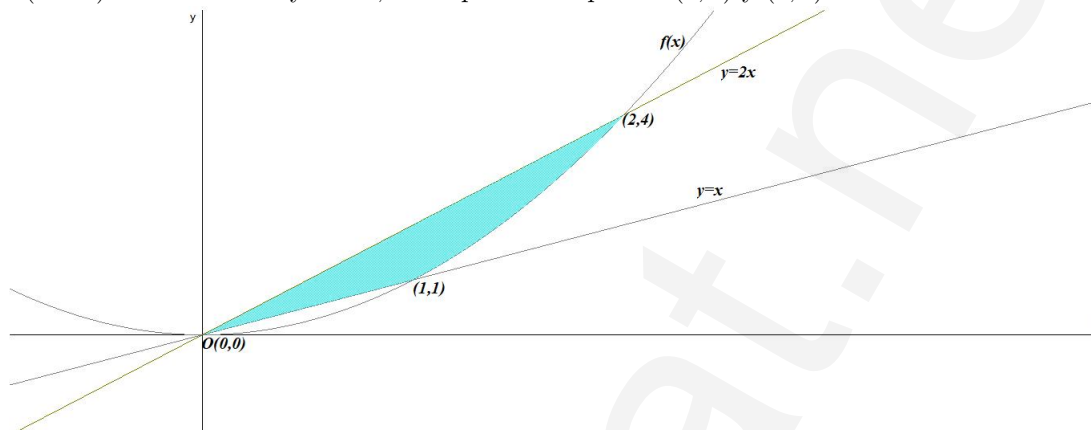
Problema 8.7 Considere las rectas $y = x$ e $y = 2x$, y la parábola $y = x^2$.

- Calcule los puntos de intersección entre las gráficas de las diferentes funciones y haga un esbozo de la región delimitada por las gráficas.
- Calcule el área de la región del apartado anterior.

Solución:

- El punto común de corte de las dos recta y la parábola es el $(0, 0)$.
El punto de corte de la recta $y = x$ con la parábola $y = x^2$ sería $x = x^2 \implies x^2 - x = x(x - 1) = 0 \implies x = 0$ y $x = 1$, corresponde a los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$.
El punto de corte de la recta $y = 2x$ con la parábola $y = x^2$ sería $2x = x^2 \implies x^2 - 2x =$

$x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 2$, corresponde a los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$.



$$b) S = \int_0^1 (2x-x) dx + \int_1^2 (2x-x^2) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2x-x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{7}{6}$$

Problema 8.8 Considere la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en aquellos puntos en los que la recta tangente es horizontal.
- Calcule las coordenadas del punto de la gráfica de la función $f(x)$ en que la pendiente de la recta tangente es máxima.

Solución:

$$a) f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

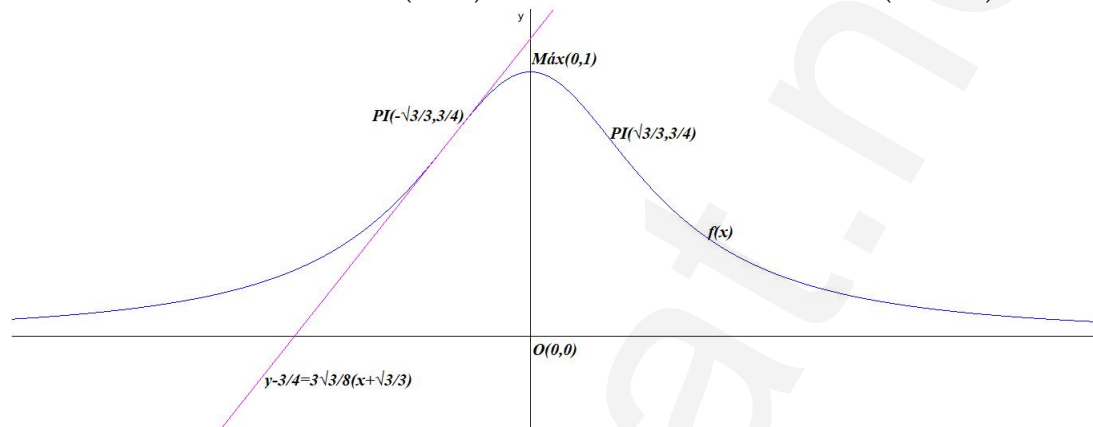
Hay un máximo en $x = 0$, que corresponde al punto $(0, 1)$ y la tangente a esta gráfica en este punto será horizontal de ecuación $y = 1$.

$$b) m(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)} \Rightarrow m'(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3}/3)$	$(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$	$(\sqrt{3}/3, \infty)$
$m'(x)$	+	-	+
$m(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función m es creciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, \infty)$ y decreciente en $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, por lo que tiene un máximo en $x = -\sqrt{3}/3$ y un mínimo en $x = \sqrt{3}/3$.

La pendiente máxima será de $m\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ y corresponde al punto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$



Problema 8.9 Considere la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- Calcule el dominio de la función f , los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
- Calcule el área de la región del plano determinada por la gráfica de la función f , las rectas $x = 1$ y $x = e$, y el eje de abscisas.

Solución:

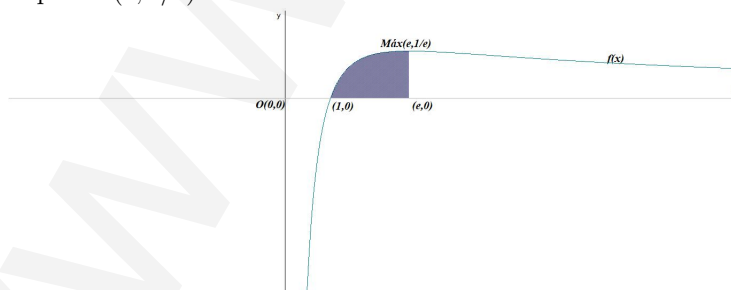
- $\text{Dom}(f) = (0, \infty)$, no tiene punto de corte con el eje de ordenadas y con el eje de abscisas:

$$\frac{\ln x}{x} = 0 \implies x = 1 \implies (1, 0).$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \implies 1 - \ln x = 0 \implies x = e$$

	$(0, e)$	(e, ∞)
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(0, e)$ y decreciente en (e, ∞) , con un máximo local en el punto $(e, 1/e)$.



$$\text{b) } F(x) = \int \frac{\ln x}{x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$S = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = F(1) - F(e) = \frac{1}{2} u^2$$

9. País Vasco

9.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 9.1 Dada la función $f(x) = x^2 + 64$ y el punto exterior a su gráfica $P(6, 0)$, encontrar la recta o rectas tangentes a f que pasen por P .

Solución:

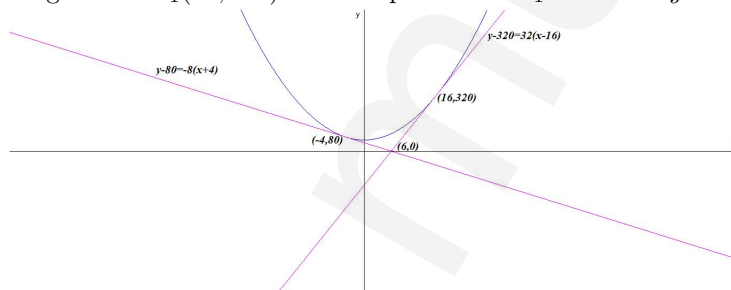
Lo primero que tenemos que encontrar son los puntos de la función en los que su tangente pasa por el punto exterior $P(6, 0)$. Sea $(a, f(a)) = (a, a^2 + 64)$ el punto de tangencia que buscamos, si la recta tangente tiene que pasar por $P(6, 0)$ la pendiente de esta recta será: $m = \frac{a^2 + 64}{a - 6}$. Por otra parte calculamos la pendiente con la derivada de la función $f'(x) = 2x \Rightarrow m = f'(a) = 2a$. Luego

$$\frac{a^2 + 64}{a - 6} = 2a \Rightarrow a^2 - 12a - 64 = 0 \Rightarrow a = -4, a = 16$$

$$P_1(-4, 80), P_2(16, 320)$$

La tangente en $P_1(-4, 80)$ tiene de pendiente $m_1 = -8 \Rightarrow y - 80 = -8(x + 4)$.

La tangente en $P_2(16, 320)$ tiene de pendiente $m_2 = 32 \Rightarrow y - 320 = 32(x - 16)$.



Problema 9.2 Calcula $\int x e^{-4x} dx$, explicando el proceso utilizado para dicho cálculo.

Solución:

$$\int x e^{-4x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-4x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{4} e^{-4x} \end{array} \right] = -\frac{x e^{-4x}}{4} + \frac{1}{4} \int e^{-4x} dx = -\frac{x e^{-4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{16} + C$$

$$C = -e^{-4x} \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{16} \right) + C = -e^{-4x} \left(\frac{4x + 1}{16} \right) + C$$

Problema 9.3 Sea f la función $f(x) = x^2 e^{-4x}$. Calcular la primera y la segunda derivada de f . Hallar los máximos y mínimos de f .

Solución:

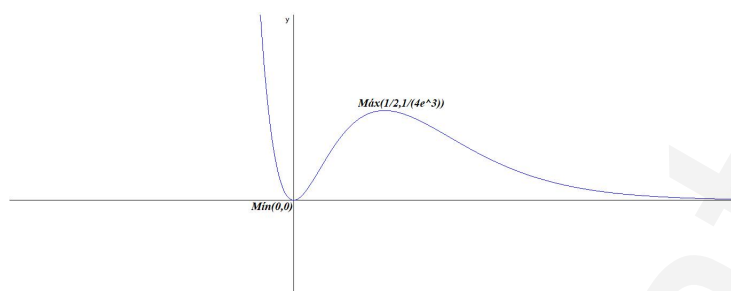
$$f'(x) = 2x e^{-4x} - 4x^2 e^{-4x} = e^{-4x} (2x - 4x^2) = 2x e^{-4x} (1 - 2x)$$

$$f''(x) = -4e^{-4x} (2x - 4x^2) + e^{-4x} (2 - 8x) = 2e^{-4x} (8x^2 - 8x + 1)$$

$$f'(x) = 2xe^{-4x}(1-2x) = 0 \implies x = 0 \text{ y } x = \frac{1}{2}$$

$$f''(0) = 2 > 0 \implies \text{en } (0, 0) \text{ hay un m\u00ednimo local.}$$

$$f''(1/2) = -\frac{2}{e^2} < 0 \implies \text{en } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4e^3}\right) \text{ hay un m\u00e1ximo local.}$$

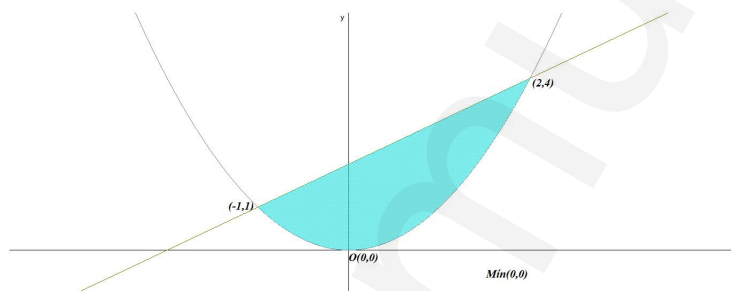


Problema 9.4 Representar el recinto finito del plano limitado por la recta $y = x + 2$ y por la par\u00e1bola $y = x^2$. Calcular su \u00e1rea.

Soluci\u00f3n:

$$x + 2 = x^2 \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies x = -1, \quad x = 2$$

$$S = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2} u^2$$



9.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 9.5 Sea f la funci\u00f3n $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

- Obtener los valores de A , B y C para que su gr\u00e1fica contenga al punto $P(0, 1)$ y para que f tenga un m\u00ednimo local en el punto $Q(2, 0)$.
- \u00bfLa funci\u00f3n obtenida tiene otros m\u00e1ximos o m\u00ednimos locales?.

Soluci\u00f3n:

$$a) f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C \implies f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$$

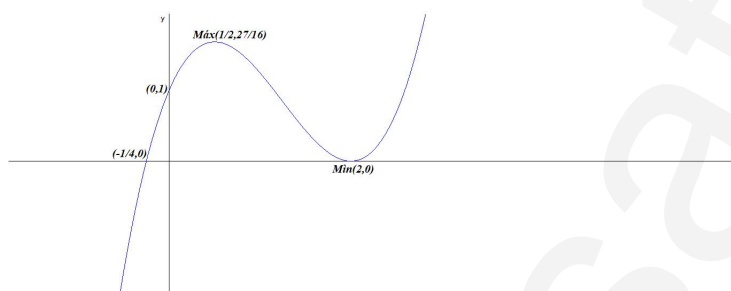
$$\begin{cases} f(0) = 1 \implies C = 1 \\ f(2) = 0 \implies 8 + 4A + 2B + C = 0 \\ f'(2) = 0 \implies 12 + 4A + B = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -15/4 \\ B = 3 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 - \frac{15}{4}x^2 + 3x + 1$$

b) $f'(x) = \frac{6x^2 - 15x + 6}{2} = 0 \implies x = 2 \text{ y } x = 1/2$

	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

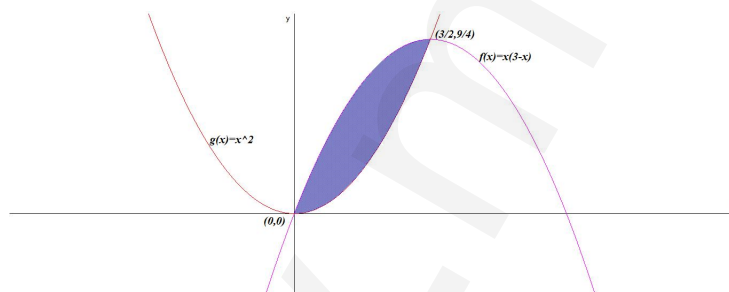
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1/2) \cup (2, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(1/2, 2)$.
Con un máximo en el punto $(1/2, 27/16)$ y un mínimo en el punto $(2, 0)$.



Problema 9.6 Sea R el recinto del plano limitado por las curvas $y = x(3 - x)$ y por $y = x^2$. Dibujar R y calcular su área.

Solución:

$$f(x) = g(x) \implies x(3 - x) = x^2 \implies 3x - 2x^2 = 0 \implies x = 0, \quad x = \frac{3}{2}$$



$$S = \int_0^{3/2} (3x - x^2 - x^2) dx = \int_0^{3/2} (3x - 2x^2) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^{3/2} = \frac{9}{8} u^2$$

Problema 9.7 Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Representar f .

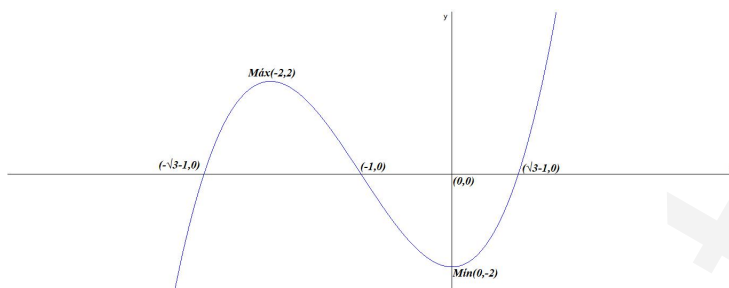
Solución:

Puntos de corte: $(0, -2)$, $(-1, 0)$, $(-1 + \sqrt{3}, 0)$ y $(-1 + \sqrt{3}, 0)$.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \implies x = 0 \text{ y } x = -2.$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-2, 0)$. Con un máximo en el punto $(-2, 2)$ y un mínimo en el punto $(0, -2)$.



Problema 9.8 Calcular $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} dx$ explicando el método seguido para dicho cálculo.

Solución:

$$\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} dx = \left[\begin{array}{l} \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)} \\ 8x+7 = A(x+3) + B(x+1) \\ x = -3 \implies -17 = -2B \implies B = 17/2 \\ x = -1 \implies -1 = 2A \implies A = -1/2 \\ \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{17/2}{x+3} \end{array} \right] =$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{17}{2} \int \frac{1}{x+3} dx = -\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{17}{2} \ln|x+3| + C$$

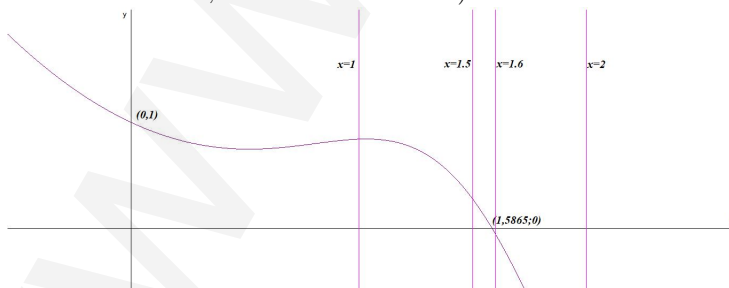
10. Extremadura

10.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 10.1 Demuestre que la ecuación $\sin(x^2) = x - 1$ tiene una solución positiva. Razone la respuesta, exponiendo el teorema justifique la solución.

Solución:

Sea la función $f(x) = \sin(x^2) - x + 1$ función continua en $\mathbb{R}$, y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ por lo que la función cumple las condiciones del teorema de Bolzano y $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$. Si cogemos un intervalo más pequeño $(1, 2)$ tendríamos $f(1) = 0,8415$ y $f(2) = -1,7568$ y por el mismo teorema podemos concluir que hay una solución positiva en este intervalo. (Ajustando a un cuarto decimal $c = 1,5865$ es una solución)

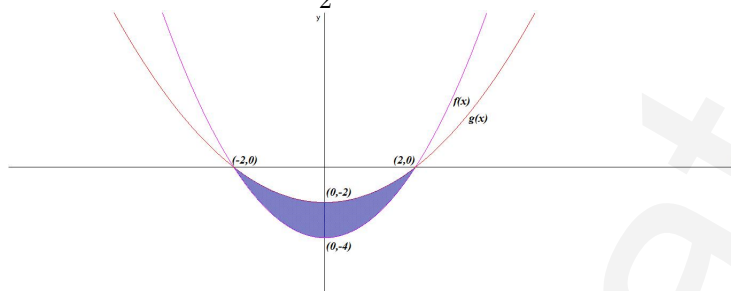


Problema 10.2 Sean las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$

- a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$.
 b) Calcule el área de la región anterior.

Solución:

a) $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4 = \frac{1}{2}x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$



b) $S = \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2 - x^2 + 4 \right) dx = \int_{-2}^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) dx = -\frac{x^3}{6} + 2x \Big|_{-2}^2 = \frac{16}{3} u^2$

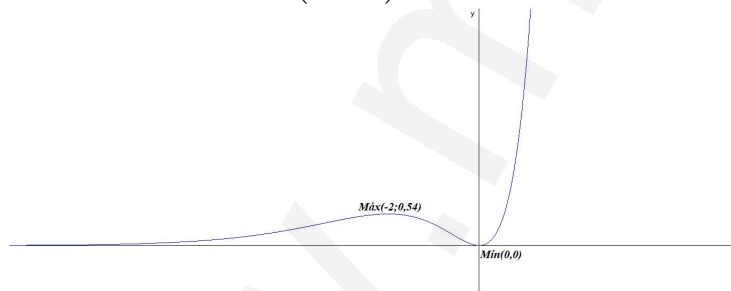
Problema 10.3 Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de la función $f(x) = x^2 e^x$.

Solución:

$f(x) = x^2 e^x \Rightarrow f'(x) = (x^2 + 2x)e^x = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = -2$.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-2, 0)$. Con un máximo en el punto $\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$ y un mínimo en el punto $(0, 0)$.



Problema 10.4 Resuelve la integral

$$\int \frac{5x + 3}{x^2 + 2x - 3} dx$$

Solución:

$$\int \frac{5x + 3}{x^2 + 2x - 3} dx = \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x = -3 \\ \frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)} \\ 5x + 3 = A(x+3) + B(x-1) \\ x = -3 \Rightarrow -12 = -4B \Rightarrow B = 3 \\ x = 1 \Rightarrow 8 = 4A \Rightarrow A = 2 \\ \frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+3} \end{array} \right] =$$

$$2 \int \frac{1}{x-1} dx + 3 \int \frac{1}{x+3} dx = 2 \ln |x-1| + 3 \ln |x+3| + C$$

10.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 10.5 Sea la función $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.
- Estudie si existe un extremo relativo de $f(x)$ en $x = 0$.

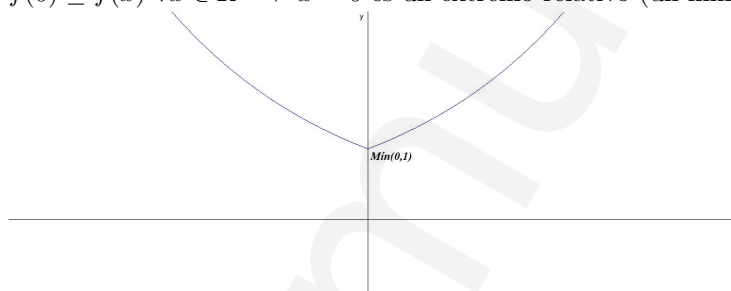
Solución:

- Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases} \implies f \text{ continua en } x = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, f'(0^-) = -1 \text{ y } f'(0^+) = 1, \text{ luego } f \text{ no es derivable en } x = 0.$$

- $f(0) \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R} \implies x = 0$ es un extremo relativo (un mínimo).

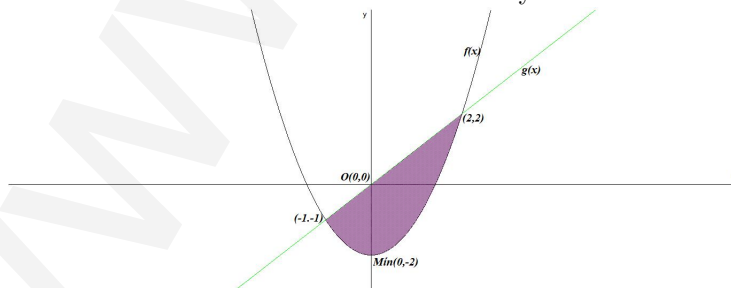


Problema 10.6 Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = x$.

- Represente la región plana encerrada por $f(x)$ y $g(x)$.
- Calcule el área de la región anterior.

Solución:

$$a) x^2 - 2 = x \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies x = -1 \text{ y } x = 2$$



$$b) S = \int_{-1}^2 (x - x^2 + 2) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2} u^2$$

Problema 10.7 Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

- a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x)$.
- b) Represente la gráfica de $f(x)$ utilizando el apartado anterior.

Solución:

- a) Es una función par, con $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ y punto de corte en $(0, 0)$.
Asíntotas:

■ **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

■ **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$$

■ **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

$$\text{Monotonía: } f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \implies x = 0$$

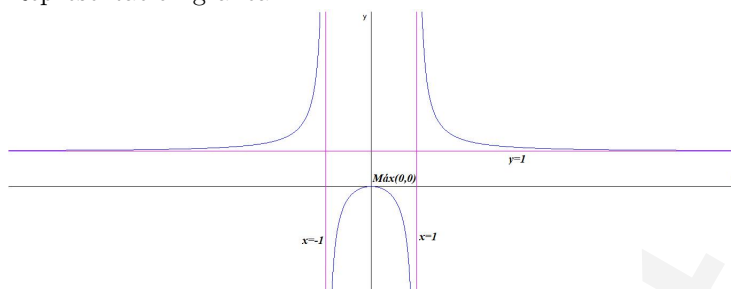
	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, \infty)$.

La función tiene un máximo en el punto $(0, 0)$.

b) Representación gráfica:



Problema 10.8 Calcule una primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$$

Solución:

$$\int \frac{x-3}{x^2-1} dx = \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \Rightarrow x=1, x=-1 \\ \frac{x-3}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ x-3 = A(x+1) + B(x-1) \\ x=-1 \Rightarrow -4 = -2B \Rightarrow B=2 \\ x=1 \Rightarrow -2 = 2A \Rightarrow A=-1 \\ \frac{x-3}{x^2-1} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x+1} \end{array} \right] =$$

$$-\int \frac{1}{x-1} dx + 2 \int \frac{1}{x+1} dx = -\ln|x-1| + 2\ln|x+1| + C$$

11. Madrid

11.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 11.1 Dada $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

- Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.
- Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.
- Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

Solución:

- a) $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$

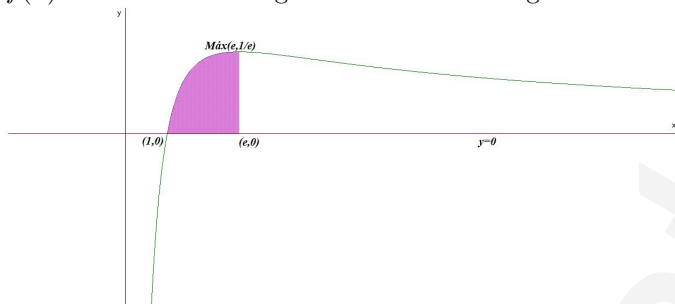
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ por la derecha.}$$

- b) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow x = e$

	$(0, e)$	(e, ∞)
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función crece en el intervalo $(0, e)$ y decrece en el intervalo $(e, +\infty)$. Luego presenta un máximo relativo en el punto $(e, 1/e)$.

c) $f(x) = 0 \implies x = 1$ luego el intervalo de integración sería el $[1, e]$.



Aunque se trata de una integral inmediata dejo la solución por partes por las características de su resolución.

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{x} dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x} dx \implies v = \ln x \end{array} \right] = (\ln x)^2 - \int \frac{1}{x} dx \implies$$

$$2 \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 \implies F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$S = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = F(e) - F(1) = \frac{1}{2} u^2$$

Problema 11.2 Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

- Determinar su dominio.
- Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- Calcular los límites laterales. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$

Solución:

a) $4x^2 - x^4 = x^2(2 - x)(2 + x) = 0 \implies x = 0, x = 2$ y $x = -2$.

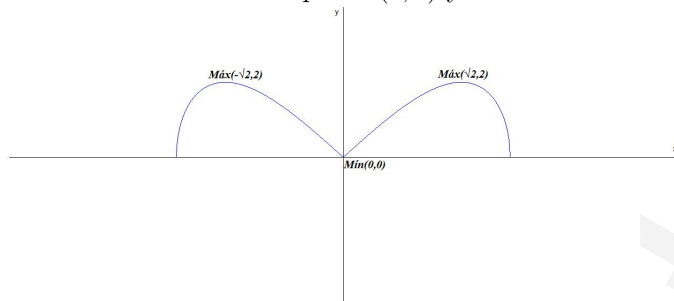
$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
-	+	+	-

$$\text{Dom}(f) = [-2, 2]$$

b) $f'(x) = \frac{2x(2 - x^2)}{\sqrt{4x^2 - x^4}} = 0 \implies x(2 - x^2) = 0 \implies x = \pm\sqrt{2}$ y $x = 0$

	$(-2, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, 0)$	$(0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, 2)$
$f'(x)$	+	-	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

Luego f decrece en el intervalo $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, 2)$ y crece en el intervalo $(-2, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$. Tendría un mínimo en el punto $(0, 0)$ y dos máximos en los puntos $(-\sqrt{2}, 2)$ y $(\sqrt{2}, 2)$.



$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = [t = -x] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t\sqrt{4-t^2}}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4-t^2}}{-1} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{4-x^2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{4-x^2} = 2 \end{aligned}$$

11.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 11.3 Se pide:

- a) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 2, \quad g(1) = 3, \quad g'(1) = 4$$

Dada $h(x) = f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

- b) Calcule la integral $\int (\sin x)^4 (\cos x)^3 dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t = \sin x$.)

Solución:

$$\text{a) } h(x) = f((x+1)^2) \implies h'(x) = 2(x+1)f'((x+1)^2) \implies$$

$$h'(0) = 2f'(1) = 4$$

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \implies k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \implies$$

$$k'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{(g(1))^2} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{3^2} = \frac{2}{9}$$

b)

$$\begin{aligned}\int (\sin x)^4 (\cos x)^3 dx &= \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ dx = \frac{dt}{\cos x} \end{array} \right] = \int t^4 \cos^3 x \frac{dt}{\cos x} = \\ &= \int t^4 \cos^2 x dt = \int t^4 (1 - \sin^2 x) dt = \int t^4 (1 - t^2) dt = \\ &= \int (t^4 - t^6) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C\end{aligned}$$

Problema 11.4 Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2(10 - t)$

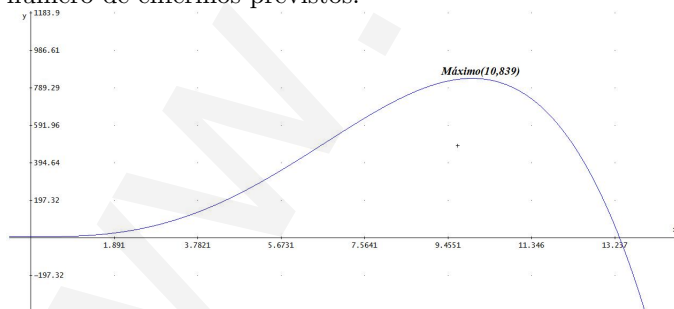
- Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.
- Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.
- Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Solución:

- $F(t) = \int (10t^2 - t^3) dt = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C$
 $F(0) = 6 \implies C = 6 \implies F(x) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6$
- $F'(t) = t^2(10 - t) = 0 \implies t = 0$ y $t = 10$

	$(0, 10)$	$(10, \infty)$
$F'(t)$	+	-
$F(t)$	creciente ↗	decreciente ↘

Luego f crece en el intervalo $(0, 10)$ y decrece en el intervalo $(10, +\infty)$. Tendría un máximo en el punto $(10; 839, 33)$. El máximo de enfermos se encuentra en el día 10 y serán sobre 839 el número de enfermos previstos.



- la función F es continua y además cumple: $F(13) = \frac{2269}{12}$ y $F(14) = -\frac{1354}{3}$ por el teorema de Bolzano $\exists c \in (13, 14)/F(c) = 0$, Es decir, entre 13 y 14 días.

12. Valencia

12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 12.1 Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.
- La representación gráfica de la curva $y = f(x)$.
- El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$.
- El valor de las integrales indefinidas $\int f(x) dx$ e $\int xe^{-x} dx$

Solución:

a) $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$, $f(0) = 0$ y $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

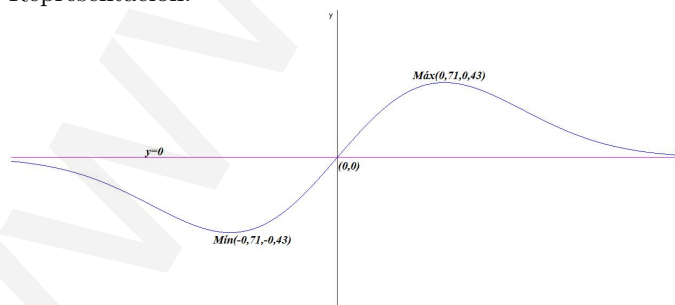
- Asíntotas verticales no hay, el denominador nunca se anula, horizontales en $y = 0$ ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$ y oblicuas no hay al haber horizontales.
- $f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ y creciente en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2e})$ y un máximo relativo en $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2e})$.

- b) La función $g(x) = f(x) + ax$ es suma de funciones continuas y derivables y, por tanto, es continua y derivable. Por otra parte $g(0) = f(0) = 0$ y $g(1) = f(1) + a = e^{-1} + a$. Para que se cumplan las condiciones del teorema de Rolle sólo falta que $g(0) = g(1) \Rightarrow e^{-1} + a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{e}$

- c) Representación:



d)

$$\int f(x) dx = \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$\int x e^{-x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = e^{-x} dx \implies v = -e^{-x} \end{array} \right] = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx =$$

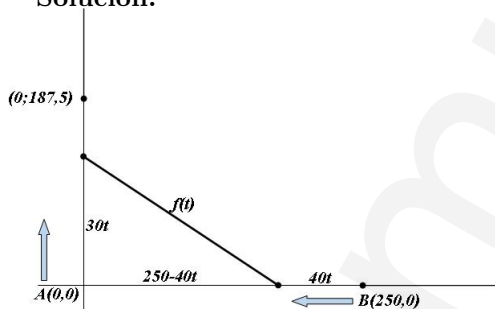
$$-x e^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$$

Problema 12.2 Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son $(0,0)$ y $(250,0)$, respectivamente, siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$. El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $(0, \frac{375}{2})$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse.
- El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto.
- Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima.

Solución:



a) $f(t) = \sqrt{(250 - 40t)^2 + (30t)^2} = 50\sqrt{t^2 - 8t + 25}$

b) $T = \frac{e}{v} = \frac{250}{40} = 6,25$ horas. O bien $T = \frac{e}{v} = \frac{187,5}{30} = 6,25$ horas.

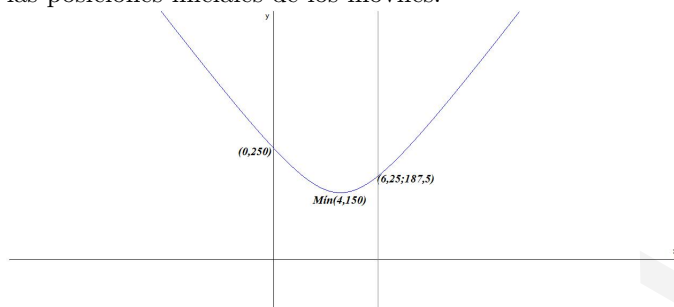
c) La función f estaría definida en el intervalo $[0, 25/4]$, tendríamos $f(0) = 250$ y $f(25/4) = 187,5$.

$$f'(t) = 50 \frac{2t - 8}{2\sqrt{t^2 - 8t + 25}} = 0 \implies 2t - 8 = 0 \implies t = 4$$

	$(0, 4)$	$(4, 25/4)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $(0, 4)$ y creciente en el intervalo $(4, \frac{25}{4})$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(4, 150)$ y tendría el máximo en $(0, 250)$ que serían

las posiciones iniciales de los móviles.



12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 12.3 Se da la función real h definida por $h(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- El dominio de la función h Los límites $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.
- La asíntota de la curva $y = h(x)$.
- La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x) dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ y la curva $y = h(x)$.

Solución:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, el denominador no se anula nunca.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = -\frac{3}{5}$$

- Asíntotas:

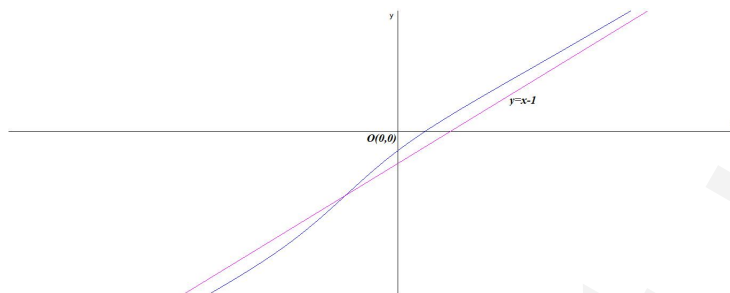
- **Verticales:** No hay
- **Horizontales:** No hay
- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^3 + 2x^2 + 5x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} - x \right) =$$

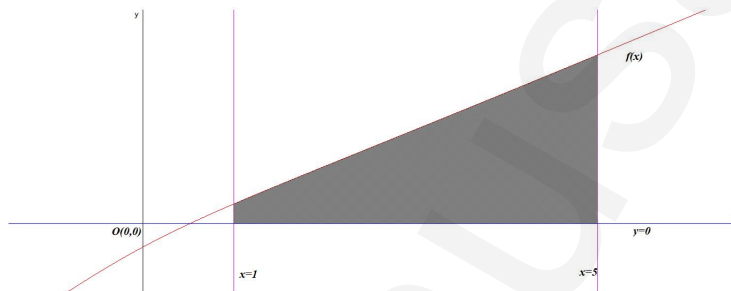
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x^2 + 5x - 3 - x^3 - 2x^2 - 5x}{x^2 + 2x + 5} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 3}{x^2 + 2x + 5} = -1$$

$$y = x - 1$$



c) $h(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = x - 1 + \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5}$. Luego:

$$S = \int_1^5 h(x) dx = \int_1^5 \left(x - 1 + \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln |x^2 + 2x + 5| \right]_1^5 = 8 + \ln 5 \approx 9,61$$



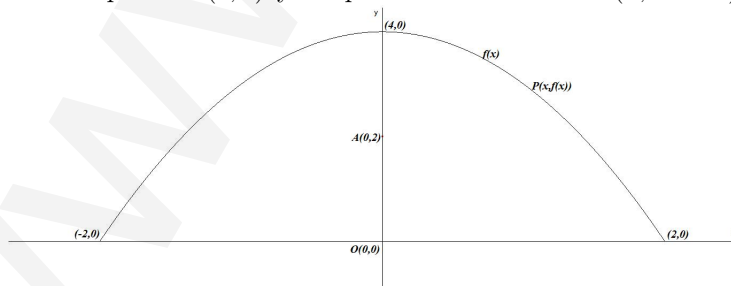
Problema 12.4 Un proyectil está unido al punto $(0, 2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(0, 2)$.
- Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \leq x \leq 2$.
- Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \leq x \leq 2$.
- El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \leq x \leq 2$.

Solución:

- Sean el punto $A(0, 2)$ y un punto de la función $P(x, 4 - x^2)$. Llamamos $d(x) = d(AP)$:



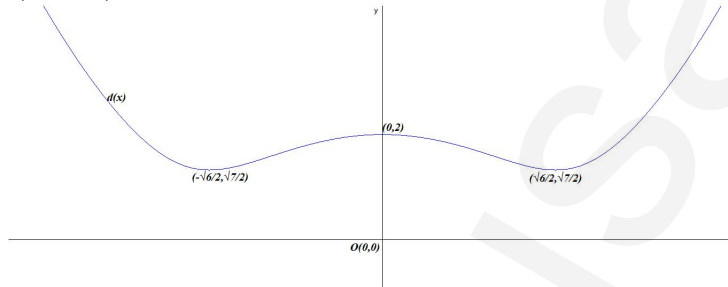
$$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (4-x^2-2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

b)

$$d'(x) = \frac{x(2x^2 - 3)}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = 0 \implies x = 0, \quad x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

	$(-\infty, -\sqrt{6}/2)$	$(-\sqrt{6}/2, 0)$	$(0, \sqrt{6}/2)$	$(\sqrt{6}/2, \infty)$
$d'(x)$	-	+	-	+
$d(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{6}/2) \cup (0, \sqrt{6}/2)$ y creciente en el intervalo $(-\sqrt{6}/2, 0) \cup (\sqrt{6}/2, \infty)$. La función presenta dos mínimos relativo en los puntos $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2})$, $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2})$ y tendría el máximo en $(0, 2)$.

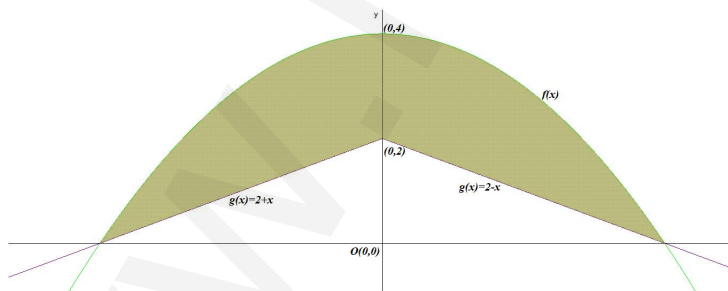


c) Contestado en el apartado anterior.

d)

$$S = \int_{-2}^0 (4-x^2-2-x) dx + \int_0^2 (4-x^2-2+x) dx = \int_{-2}^0 (-x^2-x+2) dx + \int_0^2 (-x^2+x+2) dx =$$

$$\left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 = \frac{10}{3} + \frac{10}{3} = \frac{20}{3} u^2$$



13. La Rioja

13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 13.1 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

con a y b números reales.

- Halla a y b para que f sea continua y derivable en $x = 0$.
- Para los valores anteriores de a y b analiza si f tiene un extremo relativo en $x = 0$.
- Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 1]$.

Solución:

- Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + ax + b) = b \end{cases} \Rightarrow b = 1$$

Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{si } x \leq 0 \\ -2x^2 + a & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = a \end{cases} \Rightarrow a = 0$$

- $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ Tenemos $f(0) = 1 \geq f(x) \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ en $(0, 1)$ hay un máximo.



- Hay que calcular dos áreas:
 S_1 en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 0]$:

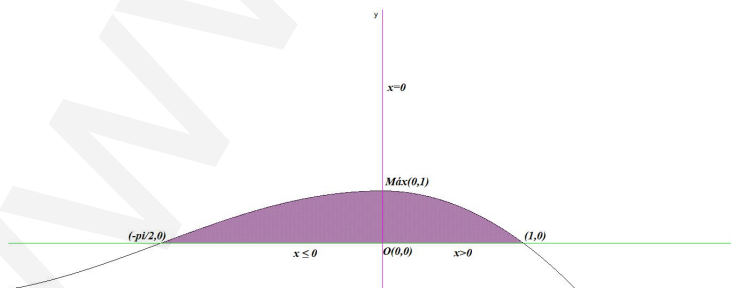
$$S_1 = \int_{-\pi/2}^0 \cos x \, dx = -\sin x \Big|_{-\pi/2}^0 = 1$$

S_2 en el intervalo $[0, 1]$:

$$S_2 = \int_0^1 (-x^2 + 1) \, dx = -\frac{x^3}{3} + x \Big|_0^1 = \frac{2}{3} u^2$$

Luego:

$$S = S_1 + S_2 = 1 + \frac{2}{3} + 4 = \frac{5}{3} u^2$$



13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 13.2 Sea la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}$$

- Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f .
- Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En caso afirmativo, calcula el valor de $c \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a que se refiere el teorema de Rolle.
- Halla el área encerrada por f y el eje de abscisas en el intervalo $[\frac{3}{2}, 4]$.

Solución:

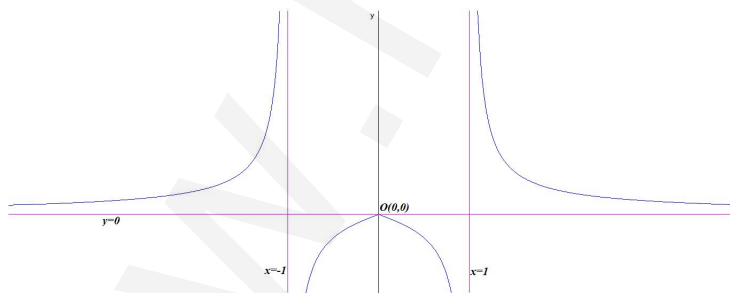
$$a) f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1} = \begin{cases} \frac{-x}{x^2 - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x^2 - 1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

Derivabilidad en $x = 0$:

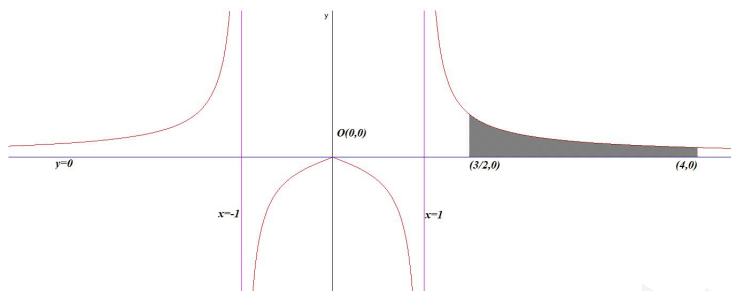
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} & \text{si } x \leq 0 \\ -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = -1 \end{cases} \Rightarrow f \text{ no es derivable en } x = 0$$



- Para poder aplicar el teorema de Rolle la función debe ser continua y derivable, es continua pero no derivable en $x = 0$ que pertenece al intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, luego no se puede aplicar el teorema de Rolle.

c)

$$S = \int_{3/2}^4 \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| \Big|_{3/2}^4 = \frac{\ln 12}{2} \simeq 1,24 \text{ u}^2$$



14. Murcia

14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 14.1 Se pide:

- Calcule la integral indefinida $\int x^2 \cos x \, dx$
- Determine el área del recinto limitado por el eje OX , las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cos x$.

Solución:

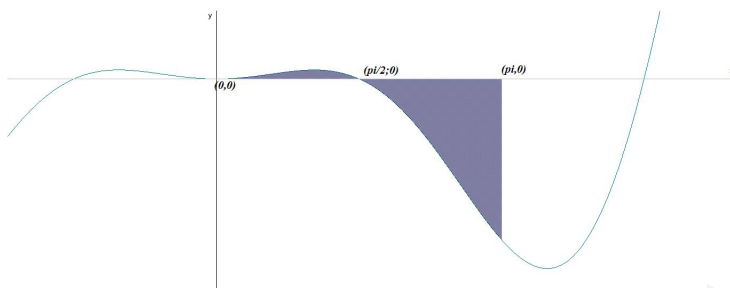
- $$\int x^2 \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \implies du = 2x dx \\ dv = \cos x dx \implies v = \sin x \end{array} \right] = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = \sin x dx \implies v = -\cos x \end{array} \right] = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \int \cos x \, dx) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C$$
- La función $f(x) = x^2 \cos x = 0 \implies x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$. Uno de los puntos de corte de la función f con el eje OX se encuentra dentro del intervalo de integración, luego habrá dos áreas a calcular, una S_1 en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y otra S_2 en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Sea $F(x) = \int x^2 \cos x \, dx = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x$ y tenemos:

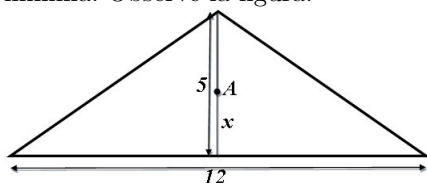
$$S_1 = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$S_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} x^2 \cos x \, dx = F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4} - 2\pi + 2$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{\pi^2}{4} - 2 + \frac{\pi^2}{4} + 2\pi - 2 = \frac{\pi^2 + 4\pi - 8}{2} \simeq 7,22 \, u^2$$



Problema 14.2 Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:



- Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$.
- Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.
- Calcule dicha cantidad mínima.

Solución:

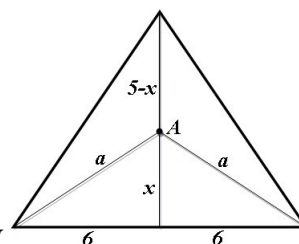
- La función suma de distancia de A a los vértices es:
 $f(x) = 2a + 5 - x = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$ según se deduce del dibujo.

$$b) f'(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 36}}{\sqrt{x^2 + 36}} = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

	$(0, 2\sqrt{3})$	$(2\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $(0, 2\sqrt{3})$ y creciente en el intervalo $(2\sqrt{3}, \infty)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(2\sqrt{3}, 5 + 6\sqrt{3}) = (3, 46; 15, 39)$.

$$c) f(2\sqrt{3}) = 5 + 6\sqrt{3} \simeq 15,39 \text{ cm}$$



14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 14.3 Se pide:

- Calcule los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{e^x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$. Determine también los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

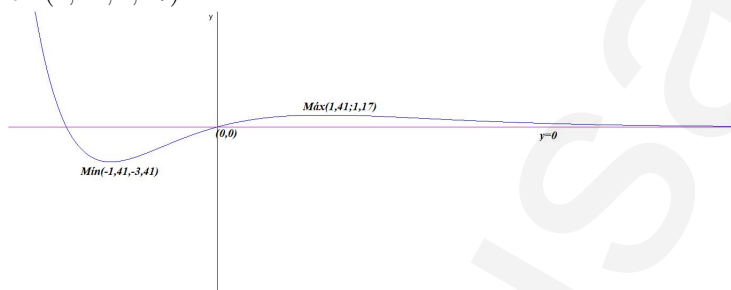
b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

Solución:

a) $f'(x) = \frac{2 - x^2}{e^x} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ y creciente en el intervalo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(-1, 41, -3, 41)$ y un máximo en $(1, 41; 1, 17)$.



b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \left[\frac{0}{0} \right] =$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}$

Problema 14.4 Se pide:

a) Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

b) Determine la primitiva de $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ que pasa por el punto $(1, 2)$.

c) Calcule el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}$

Solución:

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ dx = 2t dt \end{array} \right] = \int \frac{t}{1+t^2} 2t dt = 2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt =$
 $2 \left(\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \right) = 2(t - \arctan t) + C = 2(\sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}) + C$

b) $F(x) = 2(\sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}) + C \Rightarrow F(1) = 2(1 - \arctan 1) + C = 2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) + C = \frac{4-\pi}{2} + C =$
 $2 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow F(x) = 2(\sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}) + \frac{\pi}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = 0$

15. Navarra

15.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 15.1 Calcula la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado:

a) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}}$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x}$

Solución:

a) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} \right) = \frac{1}{2} [\ln(1 - \cos 2x) - \ln \sin 2x]$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{2 \sin 2x}{1 - \cos 2x} - \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} \right] = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} - \cot 2x = \frac{2 \sin x \cos x}{1 - \cos^2 x + \sin^2 x} - \cot 2x = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 x} - \cot 2x = \cot x - \cot 2x = \operatorname{cosec} 2x$$

b) $\ln g(x) = -x \ln \left(\frac{1}{x} \right) = x \ln x$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = 1 + \ln x \implies g'(x) = g(x)(1 + \ln x) \implies g'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} (1 + \ln x) = x^x (1 + \ln x)$$

Problema 15.2 Demuestra que existe $\alpha \in (-1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = -\frac{1}{4}$, siendo

$$f(x) = [x^2 + \log(x^2 - 2x + 7)]^{\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Solución:

La función es continua en $[-1, 3]$ y derivable en $(-1, 3)$, por lo que cumple con las condiciones del teorema del valor medio por lo que $\exists \alpha \in (-1, 3)$ tal que

$$f'(\alpha) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{1 - 2}{4} = -\frac{1}{4}$$

Para comprobar que es continua observamos que $\log(x^2 - 2x + 7) \geq \log 6 > 0$, el $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Problema 15.3 Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = 0$, siendo

$$f(x) = \frac{\ln [x - 1 + \sin^2(\frac{\pi x}{4})]}{4x - x^2}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

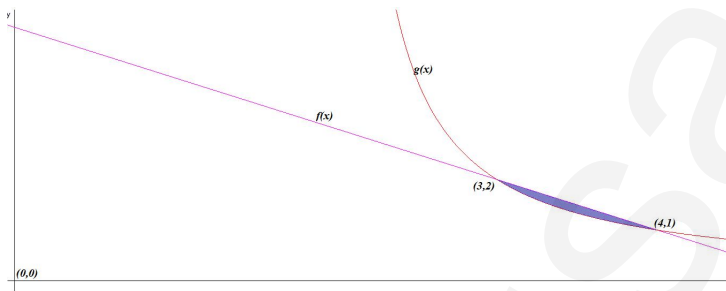
Solución: La función es continua en $(1, 3)$ y además $f(1) = -\frac{\ln 2}{3} < 0$ y $f(3) = \frac{\ln(\frac{5}{2})}{3} > 0$, por lo que se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano y, por tanto, $\exists \alpha \in (1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

Para comprobar la continuidad se observa que el intervalo está contenido en el dominio de la función y $x = 4$ (asíntota) no pertenece al intervalo. (El $x = 0$ no pertenece al dominio de la función)

Problema 15.4 Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 5 - x$ y $g(x) = \frac{2}{x-2}$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

Solución:

$$5 - x = \frac{2}{x-2} \Rightarrow -x^2 + 7x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3, x = 4$$



$$F(x) = \int (f(x) - g(x))dx = \int \left(5 - x - \frac{2}{x-2} \right) dx = 5x - \frac{x^2}{2} - 2 \ln |x-2|$$

$$S_1 = \int_3^4 (f(x) - g(x))dx = F(4) - F(3) = \frac{3}{2} - 2 \ln 2 \simeq 0,114$$

$$S = |S_1| = \frac{3}{2} - 2 \ln 2 \simeq 0,114 \text{ u}^2$$

15.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 15.5 Demuestra que existe $\alpha \in (1, e)$ tal que $f'(\alpha) = e + 1$, siendo

$$f(x) = (x + ex - e)^{\frac{e}{x}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Solución:

La función es continua y derivable en el intervalo $(1, e)$. Calculamos su derivada:

$$\ln f(x) = \frac{e}{x} \ln(x + ex - e) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{e}{x^2} \ln(x + ex - e) + \frac{e}{x} \frac{1+e}{x + ex - e} \Rightarrow$$

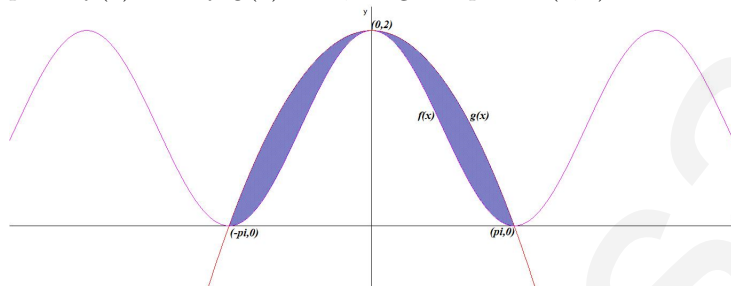
$$f'(x) = (x + ex - e)^{\frac{e}{x}} \left(-\frac{e}{x^2} \ln(x + ex - e) + \frac{e}{x} \frac{1+e}{x + ex - e} \right)$$

Tenemos: $f(1) = 1$ y $f(e) = e^2$. Por el teorema del valor medio $\exists \alpha \in (1, e) / f'(\alpha) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \frac{e^2 - 1}{e - 1} = e + 1$

Problema 15.6 Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 1 + \cos x$ y $g(x) = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 2$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

Solución:

Dibujamos las dos gráficas y nos damos cuenta que los puntos de corte de ambas gráficas van a coincidir en dos puntos de corte con el eje de abscisas y otro en el eje de ordenadas. comprobamos que esto es cierto: $f(x) = 0 \implies 1 + \cos x = 0 \implies x = \pm\pi$ y $g(x) = 0 \implies \frac{-2x^2}{\pi^2} + 2 = 0 \implies x = \pm\pi$ luego los puntos $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$ son comunes a ambas funciones. Por otra parte $f(0) = 2$ y $g(0) = 2$, luego el punto $(0, 2)$ es el tercer punto común a ambas gráficas.



Como la gráfica de la función de g siempre está por encima de la de f hacemos $g - f$ para evitar los valores absolutos y por la simetría podemos calcular el área entre 0 y π y multiplicarlo por 2:

$$S = 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{-2x^2}{\pi^2} + 1 - \cos x \right) dx = 2 \left[\frac{-2x^3}{3\pi^2} + x - \sin x \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3} u^2$$

Problema 15.7 Calcula el valor del parámetro real a para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2 + 9) & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{a(1-x)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\log(x^2 + 9)) = \log 10 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{a(1-x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2}}{-a} = \frac{\pi}{2a}$$

$$\text{Luego: } \frac{\pi}{2a} = 1 \implies a = \frac{\pi}{2}$$

Problema 15.8 Demuestra que la siguiente función tiene un máximo relativo en el intervalo $(-1, 0)$:

$$f(x) = \cos(\pi x) \ln(x^2 - 3x + 2)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Solución:

$$f'(x) = -\pi \sin(\pi x) \ln(x^2 - 3x + 2) + \cos(\pi x) \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2} = 0$$

Es bastante complicado obtener soluciones a esta igualdad por lo que llamamos $g(x) = f(x)$ y esta función es continua en el intervalo $(-1, 0)$. Empleamos el teorema de Bolzano a $g(x)$:

$$g(-1) = \frac{5}{6} > 0 \quad \text{y} \quad g(0) = -\frac{2}{3} < 0$$

Por este teorema $\exists \alpha \in (-1, 0) / g(\alpha) = 0 \implies f'(\alpha) = 0 \implies \alpha$ es un extremo. En el intervalo $(-1, \alpha)$ tenemos $f'(x) > 0$ y f es creciente, mientras que en el intervalo $(\alpha, 0)$ $f'(x) < 0$ y f es decreciente, luego en $x = \alpha$ la función f pasa de crecer a decrecer y tiene un máximo relativo.

16. Galicia

16.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 16.1 Da respuesta a los siguientes apartados:

- a) Mediante integración por partes demuestra que $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$. Luego, demuestra la misma igualdad mediante derivación.
- b) Si $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in (0, e] \\ ax + b & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$, di que relación debe existir entre a y b para que f sea continua y que valores deben tener para que f sea derivable.
- c) Calcular el área encerrada entre el eje X , la recta $x = 4$ y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in (0, e] \\ \frac{x}{e} & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$

Solución:

a) $\int \ln x \, dx = [u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \quad dv = dx \implies v = x] = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$

$$F(x) = x(\ln x - 1) + C \implies F'(x) = \ln x - 1 + x \frac{1}{x} = \ln x$$

- b) Continuidad en $x = e$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \ln x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} (ax + b) = ae + b$$

$$ae + b = 1$$

Derivabilidad en $x = e$ $f'(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \in (0, e] \\ a & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$ $f'(e^-) = \frac{1}{e}$ y $f'(e^+) = a \implies \frac{1}{e} = a \implies ae = 1$

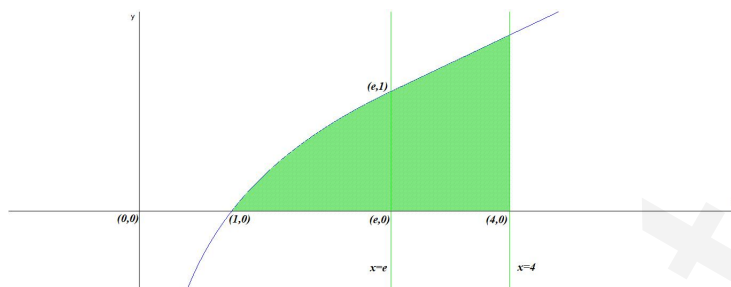
$$\begin{cases} ae + b = 1 \\ ae = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1}{e} \\ b = 0 \end{cases}$$

- c) $f(x) = 0 \implies \ln x = 0 \implies x = 1$:

$$S_1 = \int_1^e \ln x \, dx = x(\ln x - 1) \Big|_1^e = 1$$

$$S_2 = \int_e^4 \frac{x}{e} \, dx = \frac{x^2}{2e} \Big|_e^4 = \frac{16 - e^2}{2e}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 + \frac{16 - e^2}{2e} = \frac{-e^2 + 2e + 16}{2} \simeq 2,584 \text{ u}^2$$



Problema 16.2 Considérese la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, se pide:

- Calcular los límites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.
- Calcular $\int f(x) dx$.

Solución:

- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{-x}) = \infty$$
- $$f(x) = x^2 e^{-x} \implies f'(x) = x e^{-x} (2 - x) = 0 \implies x = 0 \text{ y } x = 2$$

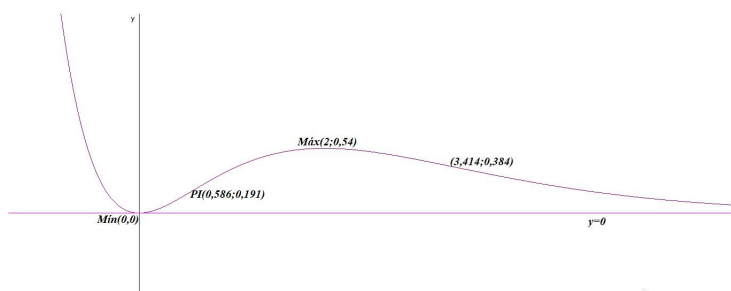
	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(0, 2)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$. La función presenta un máximo relativo en el punto $(2, 4/e^2) = (2; 0,54)$ y un mínimo relativo en el punto $(0, 0)$

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = 0 \implies x = 3,41 \text{ y } x = 0,586$$

	$(-\infty; 0,586)$	$(0,586; 3,41)$	$(3,41; \infty)$
$f''(x)$	+	-	+
$f(x)$	cóncava ∪	convexa ∩	cóncava ∪

La función es cóncava en el intervalo $(-\infty; 0,586) \cup (3,41; \infty)$ y convexa en el intervalo $(0,586; 3,41)$ con puntos de inflexión en $(0,586; 0,191)$ y $(3,41; 0,384)$.



c)

$$\int x^2 e^{-x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right] = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right] = -x^2 e^{-x} + 2 \left[-x e^{-x} + \int e^{-x} dx \right] =$$

$$-x^2 e^{-x} + 2 [-x e^{-x} - e^{-x}] + C = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$$

16.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 16.3 Da respuesta a los siguientes apartados:

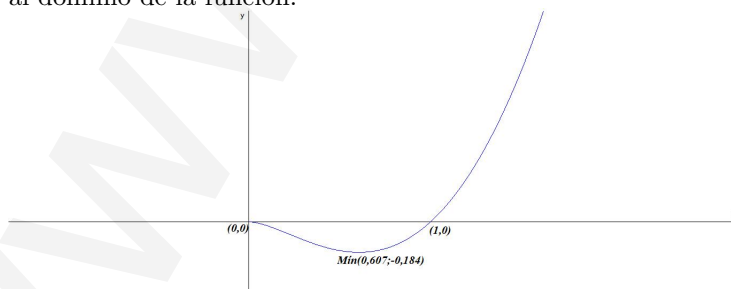
- a) Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 \ln x$.
- b) Consideremos un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen $O(0,0)$ y el punto $P(1,3)$, uno de sus lados esta sobre el eje X y otro sobre la tangente en $P(1,3)$ a la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y = 4 - x^2$.

Solución:

a) $f(x) = x^2 \ln x \Rightarrow f'(x) = x(2 \ln(x) + 1) = 0 \Rightarrow x = e^{-1/2}$ y $x = 0$.

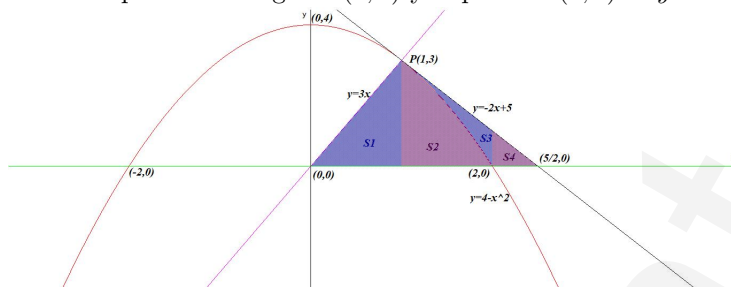
	$(0, e^{-1/2})$	$(e^{-1/2}, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(e^{-1/2}, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(0, e^{-1/2})$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(0,607; -0,184)$. El punto $(0,0)$ no pertenece al dominio de la función.



- b) Calculamos la recta tangente a la parábola en el punto $P(1, 3)$: $y' = f'(x) = -2x \Rightarrow m = f'(1) = -2$, la recta tangente es $y - 3 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 5$, es recta corta el eje de abscisas en el punto $(5/2, 0)$.

La recta que une el origen $O(0, 0)$ y el punto $P(1, 3)$ es $y = 3x$



$$S_1 = \int_0^1 3x \, dx = \left. \frac{3x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{3}{2}$$

$$S_2 = \int_1^2 (4 - x^2) \, dx = \left. 4x - \frac{x^3}{3} \right|_1^2 = \frac{5}{3}$$

Uno de los áreas pedido sería:

$$|S_1| + |S_2| = \frac{3}{2} + \frac{5}{3} = \frac{19}{6} u^2$$

$$S_3 = \int_1^2 (-2x + 1 + x^2) \, dx = \left. -x^2 + x + \frac{x^3}{3} \right|_1^2 = \frac{1}{3}$$

$$S_4 = \int_2^{5/2} (-2x + 5) \, dx = \left. -x^2 + 5x \right|_2^{5/2} = \frac{1}{4}$$

El otro área pedido sería:

$$|S_3| + |S_4| = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} u^2$$

Se comprueba que el área del triángulo es $\frac{2/5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{4}$ y $\frac{19}{6} + \frac{7}{12} = \frac{15}{4}$ como era de suponer.

Problema 16.4 Da respuesta a los apartados siguientes:

- a) De entre todos los triángulo rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y , obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.
- b) Enuncia el teorema de Bolzano y Rolle.

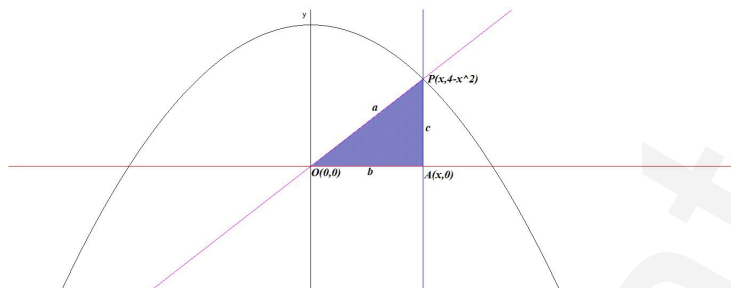
Solución:

- a) El cateto $b = x$ el $c = f(x) = 4 - x^2$ y la hipotenusa $a = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{x^2 + (4 - x^2)^2} = \sqrt{x^4 - 7x^2 + 16}$.

$$S(x) = \frac{bc}{2} = \frac{x(4 - x^2)}{2} = \frac{4x - x^3}{2} \Rightarrow S'(x) = \frac{4 - 3x^2}{2} = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$S''(x) = -3x \Rightarrow S''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ u es un máximo.}$$

Luego los catetos miden $b = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1,155 \text{ u}$, $c = \frac{8}{3} = 2,667 \text{ u}$ y $a = \frac{2\sqrt{19}}{3} = 2,906 \text{ u}$



b) Ver teoría.

17. Andalucía

17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 17.1 Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} \text{ para } x \neq -1$$

- Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f .
- Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Solución:

a) Asíntotas:

■ **Verticales:** $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 3x + 4 = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$

■ **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \infty$$

■ **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x^2 + 2x} = \frac{1}{2}$$

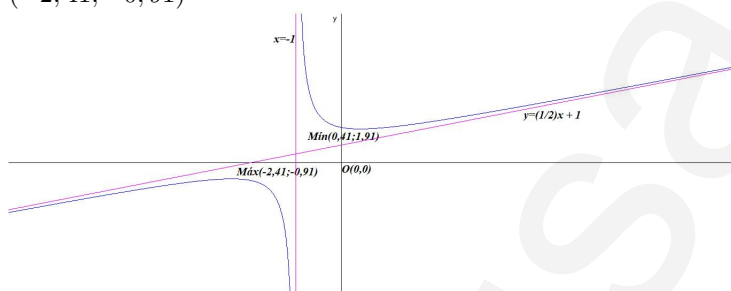
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} - \frac{x}{2} \right) = 1$$

Luego la asíntota oblicua es $y = \frac{1}{2}x + 1$

b) $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{2(x+1)^2} = 0 \implies x = -1 \pm \sqrt{2}$

	$(-\infty, -1 - \sqrt{2})$	$(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$	$(-1 + \sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1 - \sqrt{2}, -1) \cup (-1, -1 + \sqrt{2})$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $\left(-1 + \sqrt{2}; \frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}\right) = (0, 41; 1, 91)$ y un máximo relativo en el punto $\left(-1 - \sqrt{2}; \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}\right) = (-2, 41; -0, 91)$



Problema 17.2 Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, 1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$)

Solución:

$$F(x) = \int \frac{1 + e^x}{1 - e^x} dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x \implies dt = e^x dx \\ dx = \frac{1}{e^x} dt \implies dx = \frac{1}{t} dt \end{array} \right] = \int \frac{1 + t}{t(1 - t)} dt =$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1+t}{t(1-t)} = \frac{A}{t} - \frac{B}{t-1} = \frac{-A(t-1) + Bt}{t(1-t)} \\ 1 + t = -A(t-1) + Bt \\ t = 0 \implies 1 = A \\ t = 1 \implies 2 = B \\ \frac{1+t}{t(1-t)} = \frac{1}{t} - \frac{2}{t-1} \end{array} \right] = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t-1} \right) dx =$$

$$\ln |t| - 2 \ln |t - 1| + C = \ln |e^x| - 2 \ln |e^x - 1| + C = x - \ln(e^x - 1)^2 + C$$

$$F(1) = 1 - 2 \ln(e - 1) + C = 1 \implies C = 2 \ln(e - 1) \simeq 1,083$$

$$F(x) = x - \ln(e^x - 1)^2 + 2 \ln(e - 1)$$

Problema 17.3 Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x - a)e^x$.

a) Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x = 0$.

b) Para $a = 1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f .

Solución:

a) $f'(x) = e^x(x - a + 1)$ como $f'(0) = 0 \implies -a + 1 = 0 \implies a = 1$

b) Si $a = 1 \implies f(x) = (x - 1)e^x \implies f'(x) = xe^x \implies f'(x) = (x + 1)e^x = 0 \implies x = -1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

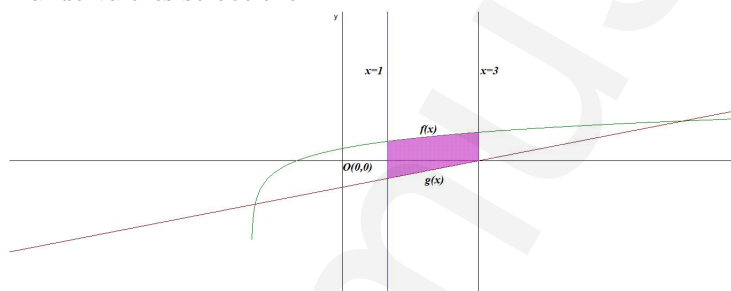
La función cambia de curvatura en $x = -1$ y en ese punto la función tiene continuidad y, por tanto, se trata de un punto de inflexión.

Problema 17.4 Considera las funciones $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x + 2)$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano) y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$.

- a) Esboza el recinto que determinan la gráfica de f , la gráfica de g , la recta $x = 1$ y la recta $x = 3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas)
- b) Determina el área del recinto anterior.

Solución:

- a) Dando valores se obtiene:



- b)

$$S = \int_1^3 \left(\ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3) \right) dx = (x+2) \ln(x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \Big|_1^3 = \ln\left(\frac{3125}{27}\right) - 1 \simeq 3,751 \text{ u}^2$$

Inciso:

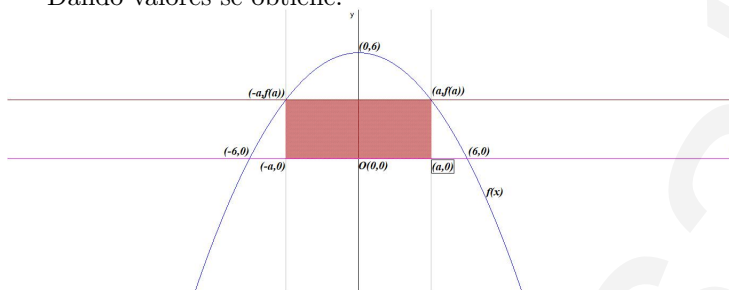
$$\int \ln(x+2) dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(x+2) \implies du = \frac{1}{x+2} dx \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right] = x \ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2} dx = x \ln(x+2) - \int \left(1 - \frac{2}{x+2} \right) dx = x \ln(x+2) - x + 2 \ln(x+2) = (x+2) \ln(x+2) - x$$

17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 17.5 Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de $f(x)$ y la recta $y = 0$.

Solución:

Dando valores se obtiene:



$$S(a) = 2af(a) = 2a \left(6 - \frac{1}{6}a^2 \right) = \frac{36a - a^3}{3}$$

$$S'(a) = 12 - a^2 = 0 \implies a = \pm 2\sqrt{3}$$

$$S''(a) = -2a \implies S'(2\sqrt{3}) = -4\sqrt{3} < 0 \implies a = 2\sqrt{3} \text{ es un máximo}$$

Luego la base del rectángulo mide $2a = 4\sqrt{3}$ u y la altura $f(a) = 4$ u.

Problema 17.6 Determina la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que es derivable, que su función derivada cumple $f'(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de f pasa por $(1, 0)$

Solución:

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^{-1/2} dx \implies v = 2x^{1/2} \end{array} \right] = 2x^{1/2} \ln x - 2 \int x^{-1/2} dx =$$

$$2x^{1/2} \ln x - 4x^{1/2} + C = 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C$$

$$F(1) = -4 + C = 0 \implies C = 4 \implies F(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + 4$$

Problema 17.7 Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \begin{cases} \sin x + ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

($\ln$ denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b .

Solución:

- f continua en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sin x + ax + b) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$$

Luego $b = 1$.

■ f derivable en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x + a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^3 + x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Tenemos } f'(0^-) = 1 + a$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^3 + x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln(x+1)}{3x^2 + 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x+1}}{6x+2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Luego } f'(0^-) = f'(0^+) \implies 1 + a = -\frac{1}{2} \implies a = -\frac{3}{2}$$

Problema 17.8 Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = xe^{-x^2}$.

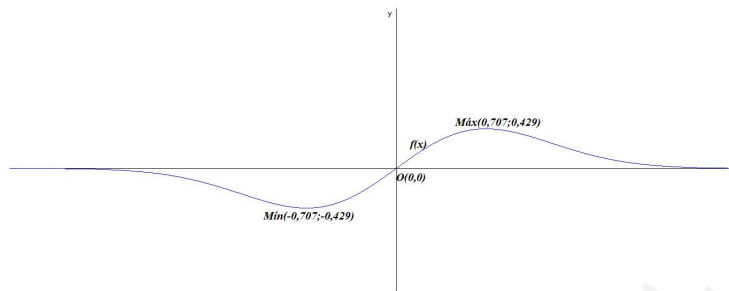
- a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- b) Determina $a > 0$ de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0, a]$ y el eje de abscisas.

Solución:

- a) El punto de corte con OY : hacemos $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$.
 Los puntos de corte con OX : hacemos $f(x) = 0 \implies xe^{-x^2} = 0 \implies x = 0 \implies (0, 0)$.
 Monotonía: $f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \implies x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ y creciente en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}e}{2e}\right) = (-0,707; -0,429)$ y un máximo relativo en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}e}{2e}\right) = (0,707; 0,429)$



$$\text{b) } F(x) = \int x e^{-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} t = -x^2 \Rightarrow dt = -2x dx \\ dx = -\frac{1}{2x} dt \end{array} \right] = \int x e^t \cdot \frac{1}{-2x} dt = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$\int_0^a f(x) dx = F(a) - F(0) = -\frac{1}{2} e^{-a^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} (-e^{-a^2} + 1) = \frac{1}{4} \Rightarrow -e^{-a^2} + 1 = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow -e^{-a^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow -a^2 = \ln \left(\frac{1}{2} \right) \Rightarrow -a^2 = \ln 1 - \ln 2 \Rightarrow a^2 = \ln 2 \Rightarrow a = \sqrt{\ln 2}$$