

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)

Noviembre 2019

Problema 1 (2,5 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} 2x - y + kz = 1 \\ -x + y - kz = 0 \\ 2x - ky + 2kz = -1 \end{cases}$$

Se pide:

- (1,5 puntos) Discutir el sistema para los diferentes valores de k .
- (1 punto) Resolverlo para $k = 1$.

(Septiembre 2019 (Aragón))

Solución:

1. $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & -k & 0 \\ 2 & -k & 2k & -1 \end{array} \right) \quad |A| = k(2-k) = 0 \implies k = 0 \text{ y } k = 2$

Si $k \neq 0$ y $k \neq 2 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.

Si $k = 0$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 2F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \implies \text{sistema incompatible.}$$

Si $k = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 2F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \implies \text{sistema incompatible.}$$

2. Si $k = 1$:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Problema 2 (2,5 puntos) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix}$ Se pide:

1. (1,5 puntos) Estudiar el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro m .
2. (1 punto) Calcular la inversa para $m = -1$

(Junio 2019 (Aragón))

Solución:

$$1. |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2 = 0 \implies m = 1 \text{ y } m = 2 \text{ Si } m \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3.$$

$$\text{Si } m = 1 \implies |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Si } m = 2 \implies |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

2. Para $m = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & -1/6 & -1/6 \\ -1 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (1 punto) Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(Junio 2019 (Islas Canarias))

Solución:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \implies \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} -14 & 7 & 0 \\ -21 & 7 & -14 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Problema 4 (1,5 puntos) Se consideran las matrices y vectores siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix} \text{ y } d = \begin{pmatrix} 6 - 2y \\ -2 \end{pmatrix}. \text{ Calcular } x \text{ e } y \text{ que verifiquen: } b - Ac = Ad$$

(Junio 2019 (Islas Baleares))

Solución:

$$b - AC = Ad \implies Ad + Ac = b \implies A(d + c) = b$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6-y \\ -2+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{pmatrix} 6x - xy - 2y + 2y^2 \\ -2y + 2y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$-2y + 2y^2 = \frac{3}{2} \implies 4y^2 - 4y - 3 = 0 \implies y = \frac{3}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}$$

Si $y = \frac{3}{2}$:

$$6x - x\frac{3}{2} - 2\frac{3}{2} + 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 \implies 9x + 3 = 4 \implies x = \frac{1}{9}$$

Si $y = -\frac{1}{2}$:

$$6x - x\left(-\frac{3}{2}\right) - 2\left(-\frac{3}{2}\right) + 2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 2 \implies 13x + 3 = 4 \implies x = \frac{1}{13}$$

Problema 5 (2,5 puntos) La aerolínea "Air", para uno de sus vuelos, ha puesto a la venta 12 plazas de Clase Preferente (P), a 250 euros cada una, 36 plazas de Clase Turista (T), a 150 euros cada una, y 72 plazas de Clase Económica (E), a 100 euros cada una. Se sabe que ha vendido el 90 % del total de las plazas, recaudando un importe de 13800 euros.

1. (0,25 puntos) Determine el número total de plazas vendidas.
2. (2,25 puntos) Sabiendo que se han vendido el triple de plazas de clase (T) que de clase (P), obtenga el número de billetes vendidos de cada clase y cuánto dinero se ha recaudado de cada clase.

(Junio 2019 - coincidente (Comunidad Madrid))

Solución:

Sea x el número de billetes vendidos de (P), y el número de billetes vendidos de (T) y z el número de billetes vendidos de (E)

$$1. \quad 12 + 36 + 72 = 120 \text{ plazas ofertadas} \implies 0,9 \cdot 120 = 108 \text{ plazas vendidas.}$$

$$2. \quad \begin{cases} 250x + 150y + 100z = 13800 \implies 5x + 3y + 2z = 276 \\ x + y + z = 108 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 276 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 0 & -4 & -3 & -324 \\ 0 & -2 & -3 & -264 \end{array} \right) = \\
&\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 0 & -4 & -3 & -324 \\ 0 & 0 & -3 & -204 \end{array} \right) \implies \begin{cases} x = 10 \\ y = 30 \\ z = 68 \end{cases}
\end{aligned}$$