

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)
Noviembre 2019

Problema 1 (2,5 puntos) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. (1,5 punto) Estudie la existencia y unicidad de soluciones según los valores del parámetro m .
2. (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para el caso de $m = 2$.

(Junio 2019 (Castilla y León))

Solución:

1. $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right)$ $|\bar{A}| = 2(m-1) = 0 \implies m = 1$ Si $m \neq 1 \implies |\bar{A}| \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas}$ y el sistema sería compatible determinado.
Si $m = 1$:
 $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array} \right) \implies$
sistema incompatible.

2. Resolvemos para $m = 2$: $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x + y = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Problema 2 (2,5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; se pide:

1. (1 punto) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.
2. (0,75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a .
3. (0,75 puntos) Calcular, en función de a , el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

(Julio 2019 (Madrid))

Solución:

1. $A^2 - I = 2A$:

$$\begin{pmatrix} a^2 - 2a + 2 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2a & 2 \\ 2 & 2 + 2a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - 2a + 1 = 2 - 2a \Rightarrow a = \pm 1 \\ a^2 + 2a + 1 = 2 + 2a \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

2. $|A| = -a^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} -(a+1) & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a+1}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2} \end{pmatrix}$$

3. $|(AA^t)^2| = |(AA^t)|^2 = |(AA^t)||AA^t| = |A||A^t||A||A^t| = |A||A||A||A| = |A|^4 = (-a^2)^4 = a^8$

Problema 3 (2,5 puntos)

Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$ y que depende del parámetro

real a , y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

1. (0,5 puntos) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$.

2. (1 punto) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$.

3. (1 punto) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$.

(Junio 2019 (Valencia))

Solución:

$$1. |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = 2(a^2 + 2a + 1) = 0 \implies a = -1. \text{ Luego si } a \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3.$$

$$\text{Si } a = -1 \implies |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2.$$

$$\text{Si } a = 1 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } |A| = 8 \implies |2A^{-1}| = 2^3 \frac{1}{|A|} = \frac{8}{8} = 1$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{array} \right) \implies \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \frac{3}{2} - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$3. B^2 = \frac{1}{3}I - 2B \implies 3(B^2 + 2B) = I \implies B(3B + 6I) = I \implies$$

$B^{-1} = 3B + 6I$, luego B es inversible con $m = 3$ y $n = 6$.

Problema 4 (2,5 puntos) El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

(Junio 2019 (Aragón))

Solución: Sean x el n° de deportistas de esquí alpino, y el n° de deportistas de esquí nórdico y z el n° de deportistas de escalada.

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ x + 16 = y + z \\ x + z = 3y \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 60 \\ x - y - z = -16 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 22 \\ y = 15 \\ z = 23 \end{cases}$$