Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2019

Problema 1 *(2,5 puntos)* Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} a^2x+ & ay+ & z= & -1\\ ax+ & ay+ & a^2z= & 0\end{array}\right.$$

se pide:

1. (1,5 puntos) Clasifique, en función del parámetro a, el sistema anterior (existencia y unicidad)
2. (1 punto). Calcule todas las soluciones del sistema en el caso de $a=2$.

(Julio 2019 (Cantabria))
Solución:

1. $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a^2 & a & 1 & -1\\ a & a & a^2 & 0\end{array}\right)$ luego Rango$(\overline{A})<3$ y $\left|\begin{array}{cc} a^2 & 1\\ a & a^2\end{array}\right|=a^2(a^2-1)=0\Longrightarrow a=0$ y $a=\pm 1$.

   Si $a\in\mathbb{R}-\{0,\pm 1\}\Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})=2=$Rango$(A)<$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.
   Si $a=0$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.
   Si $a=1$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$ Sistema Incompatible.
   Si $a=-1$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.
   Conclusión: Si $a=1$ el sistema es incompatible y en caso contrario es compatible indeterminado.

2. Si $a=2$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 4x+ & 2y+ & z= & -1\\ 2x+ & 2y+ & 4z= & 0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\lambda\\ \\ y=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\lambda\\ \\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar

la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros. Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?
(Junio 2019 (Madrid))
Solución:
Sea x el precio de un bocadillo, y el de un refresco y z el de una bolsa de patatas.

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+2y+3z=19\\ x+z=4\\ x+y=5\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3\\ y=2\\ z=1\end{array}\right.$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&1&4\\ 1&1&0&5\\ 4&2&3&19\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-4F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccr|c} 1&0&1&4\\ 0&1&-1&1\\ 0&2&-1&3\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-2F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccr|c} 1&0&1&4\\ 0&1&-1&1\\ 0&0&1&1\end{array}\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=3\\ y=2\\ z=1\end{array}\right.$$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} -1&1&0\\ -3&2&1\\ -1&0&2\end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

1. (1 punto) Calcule razonadamente el rango de M.
2. (1,5 puntos) Determine los vectores $\overrightarrow{v}$ tales que $M^2\overrightarrow{v}=M^{-1}\overrightarrow{v}$

(Junio 2019 (Cantabria))
Solución:

1. $|M|=1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(M)=3$.
2. $M^2=\begin{pmatrix} -2&1&1\\ -4&1&4\\ -1&-1&4\end{pmatrix}$ y $M^{-1}=\begin{pmatrix} 4&-2&1\\ 5&-2&1\\ 2&-1&1\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -2&1&1\\ -4&1&4\\ -1&-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4&-2&1\\ 5&-2&1\\ 2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2x+y+z \\ -4x+y+4z \\ -x-y+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-2y+z \\ 5x-2y+z \\ 2x-y+z \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -2x+y+z=4x-2y+z \\ -4x+y+4z=5x-2y+z \\ -x-y+4z=2x-y+z \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ 3x-y-z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ |A|=0 \Longrightarrow$$

El sistema es homogéneo y es compatible indeterminado.

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. (1 punto) Encontrar los valores k para los que la matriz A es invertible.

2. (1,5 puntos) Encontrar la inversa para $k=2$

(Junio 2019 (Castilla-León))
Solución:

1. $|A| = k(k-1) = 0 \Longrightarrow k=0$ y $k=1 \Longrightarrow \exists A^{-1} \forall k \in \mathbb{R} - \{0,1\}$

2. Para $k=2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$