Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria 2019) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene matriz inversa.

b) Para $a = 3$, calcúlese la matriz inversa de A y resuélvase la ecuación matricial $AX = B$.

Solución:

a) $|A| = a(a-2) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2$. No existe A^{-1} para estos dos valores.

b) Para $a = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 8x$.

a) Determínese en qué puntos la tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal.

b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Solución:

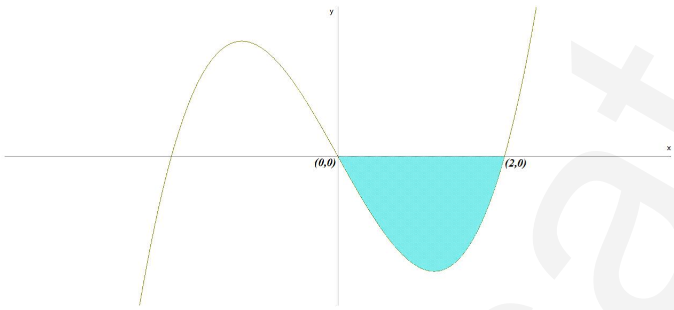
a) $f(x) = 2x^3 - 8x \Longrightarrow f'(x) = 6x^2 - 8 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow$
$\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{32\sqrt{3}}{9}\right)$ y $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{32\sqrt{3}}{9}\right)$

www.musat.net

b) $2x^3 - 8x = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = 2$ y $x = -2$. Luego la función no corta el eje de abcisas en el intervalo $[0, 2]$:

$$S_1 = \int_0^2 (2x^3 - 8x)\, dx = \left.\frac{x^4}{2} - 4x^2\right]_0^2 = -8$$

$$S = |S_1| = |-8| = 8\ u^2$$



Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 - 9} & \text{si} \quad x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de f.

b) Determínese si f tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} \dfrac{x^3}{x^2 - 9} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} (x^2 - 4) = 5 \end{cases}$$

Luego la función es discontinua no evitable en $x = 3$, en ese punto hay un salto. f es continua en $\mathbb{R} - \{\pm 3\}$ (En $x = -3$ hay una asíntota vertical)

b) Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = 3$ hay una asíntota por la izquierda, se ha visto en el apartado anterior.
  En $x = -3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -3^-} \dfrac{x^3}{x^2 - 9} = \left[\dfrac{-27}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -3^+} \dfrac{x^3}{x^2 - 9} = \left[\dfrac{-27}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$$

www.musat.net

- Horizontales: No hay.

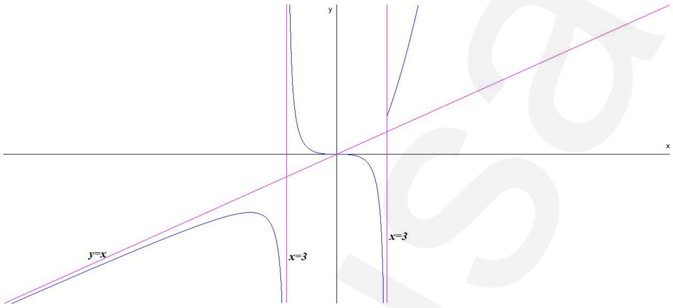
$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x^3}{x^2-9}=-\infty$$

- Oblícuas: $y = mx + n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x^3}{x^3-9x}=1$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow -\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow -\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-9}-x\right)=0$$

$$y=x$$



Problema 4 *(2 puntos)* Los escolares de un cierto colegio de Madrid fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de 2/5 hacían ejercicio regularmente y 2/3 siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de 9/25 hacían ejercicio regularmente. Se elige al azar un escolar de ese colegio

a) ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?

b) Calcúlese la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.

Solución:
E : hace ejercicio, $\overline{E}$: no hace ejercicio, D : desayuna y $\overline{D}$: no desayuna.
$P(E)=\dfrac{2}{5}$, $P(\overline{E})=\dfrac{3}{5}$, $P(D)=\dfrac{2}{3}$, $P(\overline{D})=\dfrac{1}{3}$ y $P(E|D)=\dfrac{9}{25}=\dfrac{P(E\cap D)}{P(D)}\Longrightarrow$
$P(E\cap D)=\dfrac{9}{25}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{25}$

Ponemos los datos en una tabla:

	Escolares		
	E	$\overline{E}$	Totales
D	6/25		2/3
$\overline{D}$			1/3
Totales	2/5	3/5	1

$\Longrightarrow$

	Escolares		
	E	$\overline{E}$	Totales
D	6/25	32/75	2/3
$\overline{D}$	4/25	13/75	1/3
Totales	2/5	3/5	1

www.musat.net

a) $\begin{cases} P(E\cap D)=6/25 \\ P(E)=2/5 \\ P(D)=2/3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P(E\cap D)=6/25 \\ \\ P(E)\cdot P(D)=2/5\cdot 2/3=4/15 \end{cases} \Longrightarrow$
$P(E\cap D)\neq P(E)\cdot P(D) \Longrightarrow$ E y D no son independientes.

b) $P(\overline{E}|\overline{D})=\dfrac{13}{75}$

Problema 5 *(2 puntos)* Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.

a) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.

b) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

Solución:

$$N(\mu; 25)$$

a) $n=15$, $\overline{X}=560$ y $z_{\alpha/2}=1,96$

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1,96\frac{25}{\sqrt{15}}=12,652$$

$$IC=(\overline{X}-E,\overline{X}+E)=(547,348;572,652)$$

b) $\mu=560 \Longrightarrow \overline{X}\approx N\left(560,\dfrac{25}{\sqrt{50}}\right)=N(560;3,54)$

$$P(\overline{X}\geq 565)=P\left(Z\geq \frac{565-560}{3,54}\right)=P(Z\geq 1,41)=$$

$$1-P(Z\leq 1,41)=1-0,9207=0,0793$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria 2019) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características. El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho. Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros.

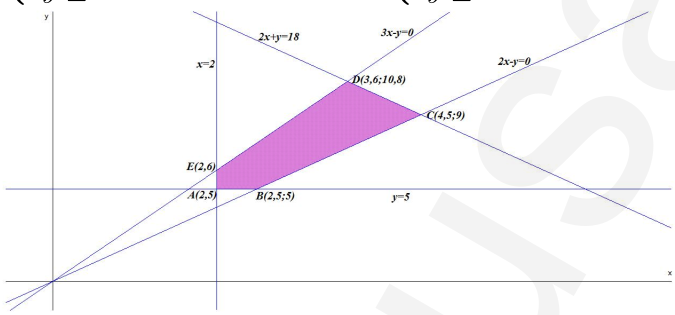
www.musat.net

a) Determínese la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensiones del estanque.

b) Si se desea que el estanque respetando esas características tenga el mayor ancho posible, determínense el largo del estanque y su coste.

Solución:
Sea x: ancho e y: largo.

$$\left\{\begin{array}{l} 1000x + 500y \leq 9000 \\ y \geq 2x \\ y \leq 3x \\ x \geq 2 \\ y \geq 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y \leq 18 \\ 2x - y \leq 0 \\ 3x - y \geq 0 \\ x \geq 2 \\ y \geq 5 \end{array}\right.$$



Los vértices a estudiar serán: $A(2,5)$, $B(2,5;5)$, $C(4,5;9)$, $D(3,6;10,8)$ y $E(2,6)$. El mayor ancho lo tiene el punto $C(4,5;9)$ con 4,5 m y un coste de $f(4,5;9) = 9000$ euros. ($f(x,y) = 1000x + 500y$)

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

y la matriz B es tal que

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese A^{-1}.

b) Calcúlese B^{-1}.

Solución:

www.musat.net

a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & -1/2 \\ 1/3 & 11/6 & -7/6 \\ -1/6 & -23/12 & 13/12 \end{pmatrix}$$

b) Sea $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2}C \Longrightarrow B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2}C \Longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}CA =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

a) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como los límites de la función cuando x tiende a infinito y a menos infinito.

b) Determínense los valores de x en los que la pendiente de la recta tangente a la función es igual a 3.

Solución:

a) Con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 3 \Longrightarrow (0, 3)$.
Con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \Longrightarrow (1, 0)$ y $(-3, 0)$.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty}(x^3 + x^2 - 5x + 3) = -\infty \quad \lim_{x \longrightarrow \infty}(x^3 + x^2 - 5x + 3) = \infty$$

b) $f'(x) = 3x^2+2x-5$ y $f'(a) = 3 \Longrightarrow 3a^2+2a-5 = 3 \Longrightarrow 3a^2+2a-8 = 0 \Longrightarrow a = -2$ y $a = \dfrac{4}{3}$.

Problema 4 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0,3$, $P(B|A) = 0,4$, $P(B|\overline{A}) = 0,6$. Calcúlese:

a) $P(A|B)$.

b) $P(\overline{A}|\overline{B})$.

www.musat.net

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:
Tenemos $P(A) = 0,3$ y $P(\overline{A}) = 0,7$, además:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} \Longrightarrow P(\overline{A} \cap B) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$$

Ponemos los datos en una tabla:

	Sucesos		
	A	$\overline{A}$	Totales
B	$0,12$	$0,42$	
$\overline{B}$			
Totales	$0,3$	$0,7$	1

$\Longrightarrow$

	Sucesos		
	A	$\overline{A}$	Totales
B	$0,12$	$0,42$	$0,54$
$\overline{B}$	$0,18$	$0,28$	$0,46$
Totales	$0,3$	$0,7$	1

a)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,12}{0,54} = 0,222$$

b)

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0,28}{0,46} = 0,61$$

Problema 5 *(2 puntos)* Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es $P = 0,22$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.

b) Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 había faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.

Solución:

www.musat.net

a) $E = 0,04$, $p = 0,22$, $q = 0,78$ y $z_{\alpha/2} = 2,576$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2,576}{0,04}\right)^2 (0,22 \cdot 0,78) = 711,69$$

Luego $n = 712$.

b) $n = 1000$, $z_{\alpha/2} = 1,96$ $p = \dfrac{250}{1000} = 0,25 \Longrightarrow q = 0,75$.

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{1000}} = 0,0268$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (0,25 - 0,0268; 0,25 + 0,0268) =$$
$$(0,2232; 0,2768) = (22,32\,\%; 27,68\,\%)$$

www.musat.net