Examen de Matemáticas II (Coincidente-Junio 2019) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* La aerolínea "Air", para uno de sus vuelos, ha puesto a la venta 12 plazas de Clase Preferente (P), a 250 euros cada una, 36 plazas de Clase Turista (T), a 150 euros cada una, y 72 plazas de Clase Económica (E), a 100 euros cada una. Se sabe que ha vendido el 90 % del total de las plazas, recaudando un importe de 13800 euros.

a) (0,25 puntos) Determine el número total de plazas vendidas.

b) (2,25 puntos) Sabiendo que se han vendido el triple de plazas de clase (T) que de clase (P), obtenga el número de billetes vendidos de cada clase y cuánto dinero se ha recaudado de cada clase.

Solución:
Sea x el número de billetes vendidos de (P), y el número de billetes vendidos de (T) y z el número de billetes vendidos de (E)

a) $12+36+72 = 120$ plazas ofertadas $\Longrightarrow 0,9\cdot 120 = 108$ plazas vendidas.

b) $\begin{cases} 250x + 150y + 100z = 13800 \Longrightarrow 5x + 3y + 2z = 276 \\ x + y + z = 108 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 276 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 0 & -4 & -3 & -324 \\ 0 & -2 & -3 & -264 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 108 \\ 0 & -4 & -3 & -324 \\ 0 & 0 & -3 & -204 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 30 \\ z = 68 \end{cases}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2\sin\left(\dfrac{\pi x^2}{2}\right) & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$,

se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$.

b) (0,75 puntos) Determinar, si existe, $f'(1)$.

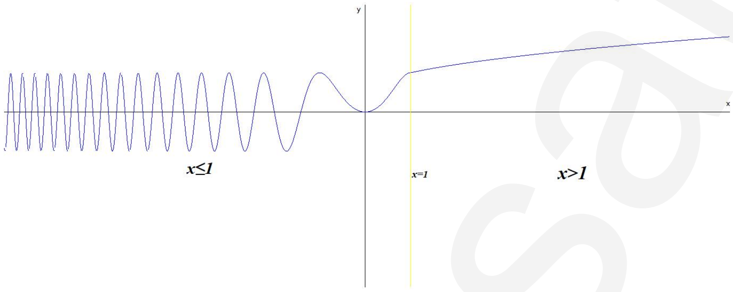
c) (1 punto) Calcular el valor de $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$.

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-} 2\sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2 = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2$$

Y como $f(1) = 2$ concluimos que f es continua en $x = 1$.



b) Lo hacemos aplicando la definición de derivada:

- Si $x \longrightarrow 1^-$ tenemos que $h \longrightarrow 0^-$ luego $f(1) = 2$ y $f(1+h) = 2\sin\left(\frac{\pi(1+h)^2}{2}\right)$:

$$f'(1^-) = \lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{2\sin\left(\frac{\pi(1+h)^2}{2}\right) - 2}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{2\pi(1+h)\cos\left(\frac{\pi(1+h)^2}{2}\right)}{1} = 0$$

- Si $x \longrightarrow 1^+$ tenemos que $h \longrightarrow 0^+$ luego $f(1) = 2$ y $f(1+h) = \frac{h}{\sqrt{1+h}-1}$:

$$f'(1^+) = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{\frac{h}{\sqrt{1+h}-1} - 2}{h} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{h-2\sqrt{h+1}+2}{h(\sqrt{h+1}-1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1-\frac{2}{2\sqrt{h+1}}}{\sqrt{h+1}-1+\frac{h}{2\sqrt{h+1}}} =$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{h+1}-2}{2(h+1)-2\sqrt{h+1}+h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{h+1}}}{2-\frac{1}{\sqrt{h+1}}+1} = \frac{1}{2}$$

- Como $f'(1^-) \neq f'(1^+) \Longrightarrow \nexists f'(1)$

c) $\displaystyle\int_0^1 2\sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\,dx = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\Big]_0^1 = \frac{2}{\pi}$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Dados los vectores $\overrightarrow{v} = (1,0,-1)$ y $\overrightarrow{w} = (1,1,0)$, se pide:

a) (1 punto) Calcular un vector que sea ortogonal (perpendicular) a $\overrightarrow{v}$ y a $\overrightarrow{w}$, que tenga módulo $\sqrt{3}/2$, y cuya tercera coordenada sea negativa.

b) (0,5 puntos) Calcular un vector $\overrightarrow{u}$ ortogonal a $\overrightarrow{v}$ y tal que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ sean linealmente independientes.

c) (1 punto) Hallar la proyección del punto $P(5,1,-1)$ sobre el plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$.

Solución:

a) $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,-1,1) = -1(-1,1,-1)$

$$\overrightarrow{t} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1) = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

b) Sea $\overrightarrow{u} = (a,b,c) \perp \overrightarrow{v} \Longrightarrow \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$, es decir: $(a,b,c)\cdot(1,0,-1) = a - c = 0 \Longrightarrow a = c$, por ejemplo $a = c = 1$ y b puede ser cualquier número real, elijo $b = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} = (1,0,1)$. Comprobamos la independencia: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} = (1,0,1)$ es ortogonal a $\overrightarrow{v}$ y a $\overrightarrow{w}$, y los tres vectores son linealmente independientes.

c) $\pi : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v} = (1,0,-1) \\ \overrightarrow{w} = (1,1,0) \\ O(0,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$$\pi : x - y + z = 0$$

- Calculo $t \perp \pi$ por $P(5,1,-1)$: $t : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1,-1,1) \\ P_t(5,1,-1) \end{array}\right. \Longrightarrow t :$ $\left\{\begin{array}{l} x = 5+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = -1+\lambda \end{array}\right.$
- Calculo P' punto de corte de t con π:

$$(5+\lambda) - (1-\lambda) + (-1+\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow P'(4,2,-2)$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Dados dos sucesos aleatorios A y B, con probabilidades respectivas $P(A) = 0,4$ y $P(B) = 0,5$, se denota por $\overline{A}$ y $\overline{B}$ a los sucesos complementarios de A y B. Se pide:

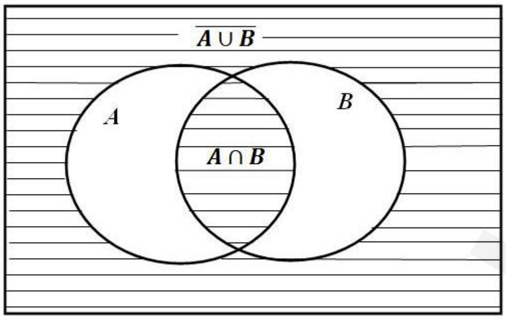
a) (1 punto) Suponiendo que A y B son independientes, calcular $P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))$.

b) (1 punto) Suponiendo que A y B son incompatibles, calcular $P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))$.

c) (0,5 puntos) Si $P(A \cup B) = 0,9$, ¿son A y B independientes?

Solución:

$P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})) = P((A \cap B) \cup (\overline{A \cup B}))$



a) Si A y B son independientes $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2$:

$P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})) = P((A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})) = P(A \cap B) + P(\overline{A \cup B}) - P((A \cap B) \cap (\overline{A \cup B})) = P(A \cap B) + P(\overline{A \cup B}) = P(A \cap B) + 1 - P(A \cup B) = P(A \cap B) + 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 + 2P(A \cap B) - P(A) - P(B) = 1 + 2P(A)P(B) - P(A) - P(B) = 1 + 0,4 - 0,4 - 0,5 = 0,5$

b) Si A y B son incompatibles $P(A \cap B) = 0$:

$P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})) = P((A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})) = P(A \cap B) + P(\overline{A \cup B}) - P((A \cap B) \cap (\overline{A \cap B})) = 0 + P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0,4 - 0,5 = 0,1$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow 0,9 = 0,4 + 0,5 - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = 0 \Longrightarrow A$ y B son incompatibles. Por otra parte $P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

Examen de Matemáticas II (Coincidente-Junio 2019)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)*

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & m & 2 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los cuales B no tiene inversa.

b) (1 punto) Para $m = 1$, calcular la inversa de la matriz B.

c) (1 punto) Para $m = 2$, calcular la matriz producto $A^t B$ (donde A^t denota la matriz traspuesta de A) y el determinante de la matriz $A^2 B$.

Solución:

a) $|B| = 4(2 - m^2) = 0 \Longrightarrow m = \pm\sqrt{2}$, para estos valores la matriz B no es invertible.

b) Si $m = 1 \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 2 & -1 \\ 1/4 & -1 & 1 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Para $m = 2 \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^t B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \\ -4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A^2 B| = |A^2||B| = |A|^2|B| = 2^2(-8) = -32$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{2(x-1)}$, se pide:

a) (1,25 puntos) Determinar las asíntotas de la curva $y = f(x)$ y estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

b) (1,25 puntos) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y la recta $2x + 4y = 7$.

Solución:

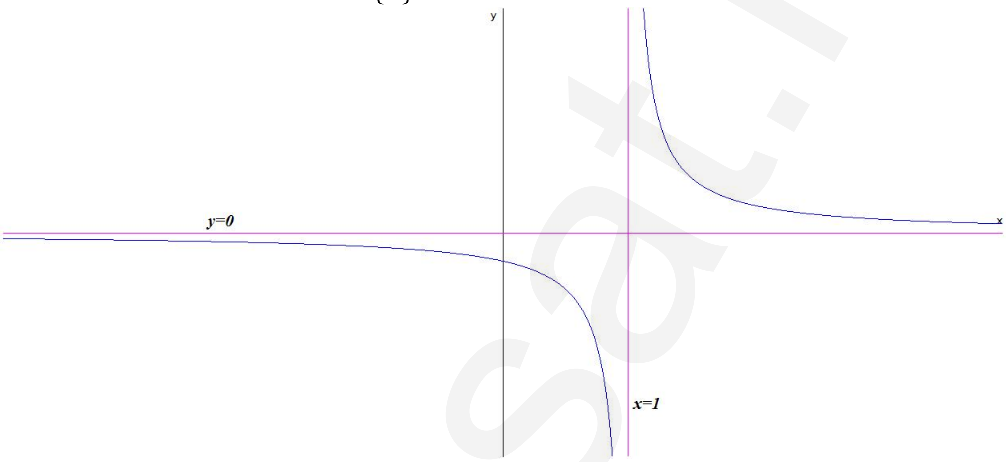
a) Asíntotas:

- Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{1}{2(x-1)} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{1}{2(x-1)} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$ ya que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{1}{2(x-1)} = 0$
- Oblicuas: no hay por haber horizontales.

$f'(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} < 0 \Longrightarrow$ la función f es siempre decreciente en todo el dominio de la función $\mathbb{R} - \{1\}$.

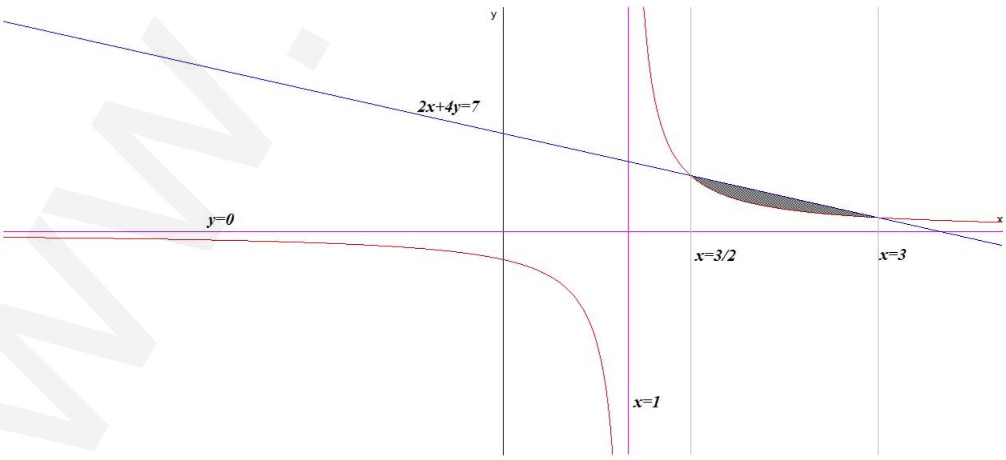


b) $2x + 4y = 7 \Longrightarrow y = \dfrac{7-2x}{4}$ los puntos de corte de las dos curvas vendrá dado por:

$$\frac{7-2x}{4} = \frac{1}{2(x-1)} \Longrightarrow x = \frac{3}{2},\ \ x = 3$$

$$S = \int_{3/2}^{3} \left(\frac{7-2x}{4} - \frac{1}{2(x-1)} \right) dx = \frac{7x - x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln|x-1| \bigg]_{3/2}^{3} =$$

$$\frac{15}{16} - \ln 2 \simeq 0,244\ \ u^2$$



Problema 3 *(2,5 puntos)* Dadas la rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y = 5 \\ y + z = 1 \end{array} \right.$ y $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + z = 3 \\ y + z = 4 \end{array} \right.$, se pide:

a) (1,25 puntos) Escribir unas ecuaciones paramétricas de cada una de las dos rectas y determinar la posición relativa de ambas.

b) (1,25 puntos) Dado el punto $P(5,0,1)$, de la recta r, obtener un punto Q, de la recta s, de modo que el triángulo OPQ sea rectángulo, con ángulo recto en $O(0,0,0)$, y calcular las longitudes de los tres lados de dicho triángulo.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 5 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \\ P_r(5, 0, 1) \end{array} \right.$

$s : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, -1, 1) \\ P_s(3, 4, 0) \end{array} \right.$

$\overrightarrow{P_sP_r} = (5, 0, 1) - (3, 4, 0) = (2, -4, 1)$

$$[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \left| \begin{array}{rrr} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right| = 0$$

$\text{Rango}\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{P_sP_r} \\ \overrightarrow{u_r} \end{array} \right) = 2$ y $\text{Rango}\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{array} \right) = 1 \Longrightarrow$ las rectas r y s son paralelas.

b) $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ} \Longrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$

$P(5, 0, 1) \Longrightarrow \overrightarrow{OP} = (5, 0, 1)$

$Q \in s \Longrightarrow Q(3 - \lambda, 4 - \lambda, \lambda) \Longrightarrow \overrightarrow{OQ} = (3 - \lambda, 4 - \lambda, \lambda)$

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 15 - 5\lambda + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{15}{4}$

$\overrightarrow{OQ} = \left(3 - \dfrac{15}{4}, 4 - \dfrac{15}{4}, \dfrac{15}{4} \right) = \left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{15}{4} \right)$

$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{26}\ u$, $|\overrightarrow{OQ}| = \frac{1}{4}\sqrt{235}\ u$ y $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{4}\sqrt{651}\ u$.

Problema 4 *(2,5 puntos)* Una compañía de mensajería tiene una probabilidad del 2 % de dañar cada uno de sus envíos. Asumimos que las probabilidades de que varios envíos distintos resulten dañados son independientes entre sí. Se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que en un lote de 10 paquetes hayan llegado con desperfectos exactamente 2 envíos.

b) (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que en un lote de 10 paquetes hayan llegado con desperfectos 2 o más envíos.

c) (1,5 puntos) Usando la aproximación por la normal adecuada, hallar la probabilidad de que en un lote de 2000 paquetes hayan llegado exactamente 30 paquetes defectuosos.

Solución:

a) Se trata de una binomial $B(0,02;10)$:

$$P(X=2)=\binom{10}{2}0,02^2\cdot 0,98^8=0,015314$$

b) Se trata de una binomial $B(0,02;10)$:

$$P(X\geq 2)=1-(P(X=0)+P(X=1))=$$

$$1-\left(\binom{10}{0}0,02^0\cdot 0,98^{10}+\binom{10}{1}0,02^1\cdot 0,98^9\right)=$$

$$1-(0,817073+0,16675)=0,016177$$

c) Se trata de una distribución binomial $B(2000;0,02)$ con $n=2000$, $p=0,02$ y $q=1-p=0,98$. Como $np=2000\cdot 0,02=40>5$ y $nq=2000\cdot 0,98=1960>5$ podemos aproximar esta binomial por una normal $N(np,\sqrt{npq})=N(40;6,261)$.

$$P(X=30)=P(29,5<X<30,5)=P\left(\frac{29,5-40}{6,261}<Z<\frac{30,5-40}{6,261}\right)$$

$$=P(-1,68<Z<-1,52)=P(Z<-1,52)-P(z<-1,68)=$$

$$1-P(Z<1,52)-(1-P(Z<1,68)=P(z<1,68)-P(Z<1,52)$$

$$=0,9535-0,9357=0,0178$$