Examen de Matemáticas II (Modelo 2019)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Para cada uno de los siguientes apartados, proponga un ejemplo de matriz cuadrada A, de dimensión 3×3, con todos sus números distintos de cero y con sus tres filas y columnas diferentes, que cumpla la condición pedida.

a) (0,5 puntos) El determinante de A vale 0.

b) (0,5 puntos) El determinante de A vale 1.

c) (0,5 puntos) La matriz A coincide con su traspuesta.

d) (1 punto) Para una cierta matriz cuadrada C, distinta de la matriz nula y de la identidad, se verifica que $A\cdot C = C\cdot A$. (Debe proponer ejemplos concretos para las dos matrices A y C.)

Solución:

a) Basta con que una fila o columna sea combinación lineal de las otras dos, por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ como $F_3 = F_1 + F_2 \Longrightarrow |A| = 0$

b) Dividiendo una fila o columna por el valor del determinate de esa matriz obtenemos una nueva matriz de determinate 1, por ejemplo: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $|B| = -15 \Longrightarrow A = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/15 & -2/15 & -1/15 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 1$

c) La matriz tiene que ser simétrica, por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = A^T$

d) Bastaría con que $C = k\cdot I, , \forall k \in \mathbb{R}$, una matriz proporcional a la identidad: $A\cdot C = A\cdot k\cdot I = k\cdot I\cdot A = C\cdot A$, por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 15 & -5 & 25 \\ 10 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 15 & -5 & 25 \\ 10 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

Luego $A \cdot C = C \cdot A$.

Problema 2 *(2,5 puntos)* La contaminación por dióxido de nitrógeno, NO_2, en cierta estación de medición de una ciudad, durante el pasado mes de abril, se puede modelar por la función $c(t) = 80 - 6t + \dfrac{23t^2}{20} - \dfrac{t^3}{30}\ mg/m^3$ donde $t \in [0, 30]$ representa el tiempo, **expresado en días**, transcurrido desde las 0 horas del día 1 de abril.

a) (0,5 puntos) ¿Qué nivel de NO_2, había a las 12 horas del día 10 de abril?

b) (1,25 puntos) ¿En qué momento se alcanzó el máximo nivel de NO_2?, ¿cuál fue ese nivel máximo?

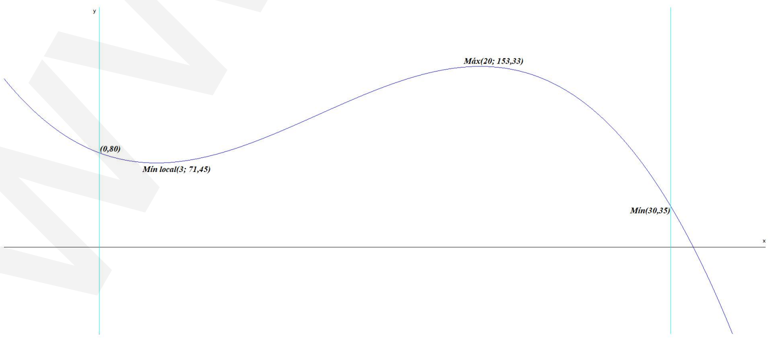
c) (0,75 puntos) Calcule, mediante $\dfrac{1}{30}\displaystyle\int_0^{30} c(t)dt$, el nivel promedio del mes.

Solución:

a) $c(9,5) = 98,21\, mg/m^3$

b) $c(0) = 80$, $c(30) = 35$ y $c'(t) = -\dfrac{t^2}{10} + \dfrac{23t}{10} - 6 = 0 \Longrightarrow t = 3,\ \ t = 20$

	$(0,3)$	$(3,20)$	$(20,30)$
$c'(x)$	$-$	$+$	$-$
$c(x)$	decreciente	creciente	decreciente



Luego el máximo se da el día 20 con $c(20) = 153,33\ mg/m^3$.

c) $\overline{X} = \dfrac{1}{30}\displaystyle\int_0^{30} c(t)dt = \dfrac{1}{30}\left(80t - 3t^2 + \dfrac{23t^3}{60} - \dfrac{t^4}{120}\right)\Big]_0^{30} = \dfrac{3300}{30} = 110$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Dados los puntos $A(1,2,-3)$; $B(1,5,0)$; $C(5,6,-1)$ y $D(4,-1,3)$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular el plano π que contiene a los puntos A, B, C y la distancia del punto D a dicho plano.

b) (0,5 puntos) Calcular el volumen del tetraedro definido por los cuatro puntos dados.

c) (0,5 punto) Calcular el área del triángulo definido por A, B y C.

Solución:

a) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0,3,3) \\ \overrightarrow{AC} = (4,4,2) \\ A(1,2,-3) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$$\pi : x - 2y + 2z + 9 = 0$$

$$d(D,\pi) = \frac{|4+2+6+9|}{\sqrt{1+4+4}} = 7\ u$$

b) $\overrightarrow{AD} = (3,-3,6)$

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}\right| = \frac{|-126|}{6} = 21\ u^3$$

c)

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|(-6,12,-12)| = 9\ u^2$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* El examen de oposición a la Administración Local de cierta ciudad consta de 300 preguntas, con respuesta verdadero o falso. Un opositor responde al azar todas las preguntas. Se considera la variable aleatoria X("número de respuestas acertadas") y se pide:

a) (1,5 puntos) Justificar que la variable X se puede aproximar por una normal y obtener los parámetros correspondientes.

b) (1 punto) Utilizando la aproximación por la normal, hallar la probabilidad de que el opositor acierte a lo sumo 130 preguntas y la probabilidad de que acierte exactamente 160 preguntas.

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial $B(300; 0,5)$ con $n = 300$, $p = 0,5$ y $q = 1 - p = 0,5$. Como $n > 10$, $np = 300 \cdot 0,5 = 150 > 5$ y $nq = 300 \cdot 0,5 = 150 > 5$ podemos aproximar esta binomial por una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(150; 8,66)$.

b) La probabilidad de que acierte a lo sumo 130 aplicando la correción por continuidad de Yates sería:

$$P(X \le 130,5) = P\left(Z \le \frac{130,5 - 150}{8,66}\right) = P(Z \le -2,25) =$$

$$1 - P(Z \le 2,25) = 1 - 0,9878 = 0,0122$$

La probabilidad de que acierte exactamente 160 aplicando la correción por continuidad de Yates sería:

$$P(159,5 \le X \le 160,5) = P\left(\frac{159,5 - 150}{8,66} \le Z \le \frac{160,5 - 150}{8,66}\right) =$$

$$P(1,10 \le Z \le 1,21) = P(Z \le 1,21) - P(Z \le 1,10) =$$

$$0,8869 - 0,8643 = 0,0226$$

Examen de Matemáticas II (Modelo 2019)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & -my- & z = & 0 \\ mx- & 4y+ & (6-2m)z = & -8m \\ -x+ & 2y+ & z = & 6 \end{array}\right.$$ se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema en el caso $m = 6$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & -1 & 0\\ m & -4 & 6-2m & -8m\\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \quad |A|=-m^2+8m-12=0\Longrightarrow$$

$$m=2,\quad m=6$$

Si $m\neq 2$ y $m\neq 6\Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.

Si $m=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0\\ 2 & -4 & 2 & -16\\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-2F_1\\ F_3+F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -16\\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

Si $m=6$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0\\ 6 & -4 & -6 & -48\\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-6F_1\\ F_3+F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0\\ 0 & 32 & 0 & -48\\ 0 & -4 & 0 & 6 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 8F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0\\ 0 & 32 & 0 & -48\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $m=6$:

$$\left\{\begin{array}{l} x-6y-z=0\\ 2y=-3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=-9+\lambda\\ y=-3/2\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)*

a) (1 punto) A partir de la siguiente gráfica de la función f, determine los valores de: $f'(-1)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$.

b) (1,5 puntos) Calcule $\displaystyle\int_{-3}^{\pi} g(x)\,dx$, donde $g(x)=\left\{\begin{array}{rcr} x^2+2x+1 & \text{si} & -3\le x\le 0\\ 1+\sin x & \text{si} & 0<x\le 4 \end{array}\right.$

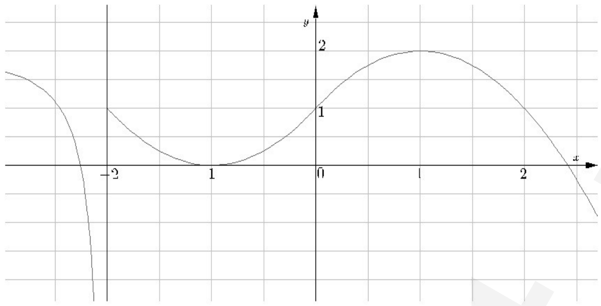
Solución:

a) En $x=-1$ hay un extremo luego $f'(-1)=0$, Por otra parte:

$\lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)=1$



b) La función es continua en $x = 0$, los límites laterales coinciden y con el valor de la función en ese punto. Ahora resolvemos la integral:

$$\int_{-3}^{\pi} g(x)\,dx = \int_{-3}^{0}(x^2+2x+1)\,dx + \int_{0}^{\pi}(1+\sin x)\,dx =$$

$$\left.\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-3}^{0} + x - \cos x]_0^{\pi} = 5+\pi.$$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas $r: \left\{\begin{array}{l} x = 2+\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 1-\lambda \end{array}\right.$ y $s: \left\{\begin{array}{l} x-y=2 \\ y+z=1 \end{array}\right.$

se pide:

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s.

b) (1 punto) Obtener un plano que contenga a las dos rectas.

c) (0,5 puntos) Dado el punto $A(3,1,0)$, de la recta s, obtener un punto B, de la recta r, de modo que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular a la recta r.

Solución:

$$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ P_r(2,3,1) \end{array}\right. \quad s: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,-1,1) \\ P_s(3,1,0) \end{array}\right. \quad \overrightarrow{P_sP_r} = (-1,2,1)$$

a) $[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \left|\begin{array}{ccc} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right| = 0$ y $\text{Rango}(\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}) = 2$ y $\text{Rango}(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}) = 1$, luego las dos rectas son paralelas.

b) $\pi: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{P_sP_r} = (-1,2,1) \\ P_s(3,1,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi: \left|\begin{array}{ccc} x-3 & y-1 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow$

$$\pi: x+z-3=0$$

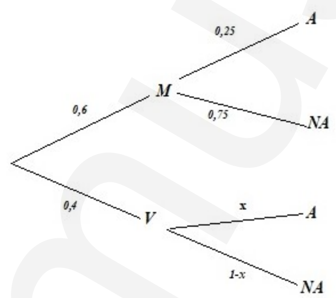
c) $B \in r \Longrightarrow B(2+\lambda, 3+\lambda, 1-\lambda) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = (2+\lambda, 3+\lambda, 1-\lambda) - (3,1,0) = (-1+\lambda, 2+\lambda, 1-\lambda)$
$\overrightarrow{AB} \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \Longrightarrow -1+\lambda+2+\lambda-1+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow B(2,3,1)$

Problema 4 *(2,5 puntos)* El grupo de WhatsApp, formado por los alumnos de una escuela de idiomas, está compuesto por un 60 % de mujeres y el resto varones. Se sabe que el 30 % del grupo estudia alemán y que la cuarta parte de las mujeres estudia alemán. Se recibe un mensaje en el grupo. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que lo haya enviado una mujer, si se sabe que el o la remitente estudia alemán.

b) (1,25 puntos) Si en el mensaje no hay ninguna información sobre el sexo y estudios del remitente, calcular la probabilidad de que sea varón y estudie alemán.

Solución:



a) $P(M|A) = \dfrac{P(A|M)P(M)}{P(A)} = \dfrac{0,25 \cdot 0,6}{0,3} = 0,5$

b) $P(A) = 0,6 \cdot 0,25 + 0,4 \cdot x = 0,3 \Longrightarrow x = P(A|V) = 0,375$

$$P(A \cap V) = P(A|V)P(V) = 0,375 \cdot 0,4 = 0,15$$