

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)
Octubre 2018

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & -1 & 1 \\ 3 & 1 & m \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & -1 & 1 \\ 3 & 1 & m \end{vmatrix} = -m^3 + 3m + 2 = 0 \implies m = 2, m = -1$$

Si $m = 2$ o $m = -1 \implies |A| = 0 \implies \nexists A^{-1}$.

Si $m \neq 2$ y $m \neq -1 \implies |A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}$.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -3/2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX - B = C - X$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - B = C - X \implies X = (A + I)^{-1}(C + B)$$

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad (A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/10 & 3/10 \end{pmatrix}$$

$$C + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = (A + I)^{-1}(C + B) = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/10 & 3/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 \\ 7/10 & 3/8 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Resolver utilizando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & 0 \\ -1 & x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & -1 \\ 0 & 1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & 0 \\ -1 & x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & -1 \\ 0 & 1 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ -1 & x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & -1 \\ 0 & 1 & -1 & x \end{vmatrix} =$$

$$x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & -1 \\ 0 & 1 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 \end{bmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & x-1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & x \end{vmatrix} =$$

$$x \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ -1 & x-1 & -2 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = x^2(x^2 - 4)$$