Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Marzo 2018) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese $A^{-1}A^T$.- **Nota**.- La notación A^T representa a la matriz transpuesta de A.

b) Resuélvase la ecuación matricial: $\dfrac{1}{4}A^2 - AX = B$.

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A^T = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\frac{1}{4}A^2 - AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right)$$

$$\frac{1}{4}A^2 - B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 14 & -2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 14 & -2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por

$$y \geq 2x - 4; \quad y \leq x - 1; \quad 2y \geq x; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

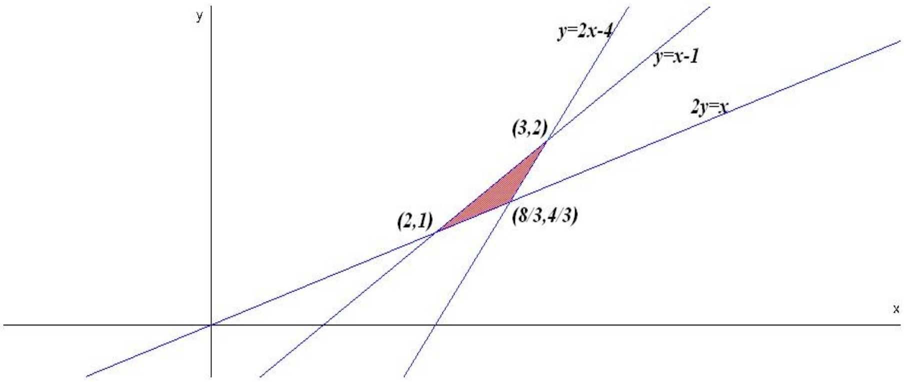
.

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) La región S pedida será:



Los vértices serían: $(2, 1)$, $(3, 2)$ y $(8/3, 4/3)$.

b)

$$\begin{cases} f(2,1) = -1 \text{ Máximo} \\ f(3,2) = -3 \text{ Mínimo} \\ f(8/3,4/3) = -4/3 \end{cases}$$

El máximo es de -1 y se alcanza en el punto $(2, 1)$. El mínimo es de -3 y se alcanza en el punto $(3, 2)$.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+2} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x + 2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en R.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\, dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{2}{x+2} = 1 \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} (x+2) = 2 \end{cases}$$

Luego f es discontinua no evitable en $x = 0$, hay un salto. Tampoco lo es en $x = -2$ donde hay una asíntota vertical, en conclusión: f es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2}{x+2}\, dx = 2\ln|x+2|]_{-1}^{0} = 2\ln 2.$

Problema 4 *(2 puntos)*El número total de bacterias (en miles) presentes en un cultivo después de t horas viene dado por $N(t) = 2t(t-10)^2 + 50$.

a) Calcúlense la función derivada $N'(t)$.

b) Durante las 10 primeras horas, ¿en qué instantes se alcanzan la población máxima y mínima?

c) Esbócese la gráfica de $N(t)$ en el intervalo $[0, 10]$.

Solución:

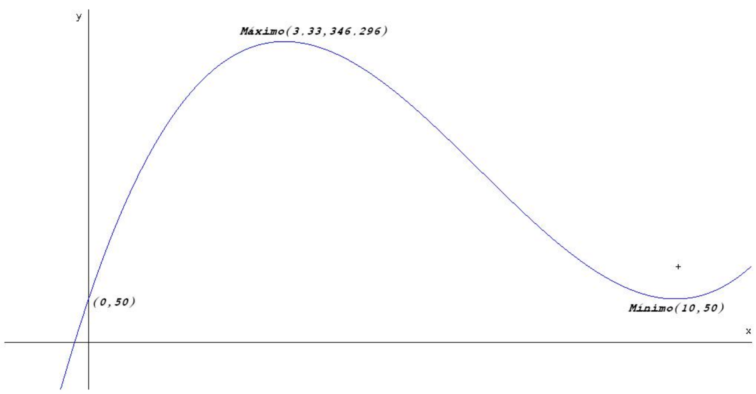
a) $N'(t) = 2(3t^2 - 40t + 100)$

b) $N'(t) = 2(3t^2 - 40t + 100) = 0 \Longrightarrow t = 10$ y $t = 10/3$:

	$(0, 10/3)$	$(10/3, 10)$	$(10, \infty)$
$N'(t)$	$+$	$-$	$+$
$N(t)$	Crece	Decrece	Crece

Luego la función tiene un máximo en el punto $(3{,}33, 346{,}296)$ y un mínimo en el punto $(10, 50)$.

c) La representación gráfica es



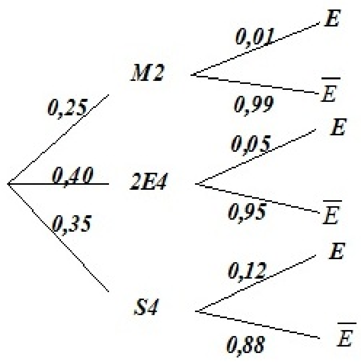
Problema 5 *(2 puntos)* Una empresa de reparto de paquetería clasifica sus furgonetas en función de su antigüedad. El 25 % de sus furgonetas tiene

menos de dos años de antigüedad, el 40 % tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y el resto tiene una antigüedad superior a cuatro años. La probabilidad de que una furgoneta se estropee es 0,01 si tiene una antigüedad inferior a dos años; 0,05 si tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y 0,12 si tiene una antigüedad superior a cuatro años. Se escoge una furgoneta al azar de esta empresa. Calcúlese la probabilidad de que la furgoneta escogida:

a) Se estropee.

b) Tenga una antigüedad superior a cuatro años sabiendo que no se ha estropeado.

Solución:



a) $P(E) = P(M2)P(E|M2) + P(2E4)P(E|2E4) + P(S4)P(E|S4) = 0,25 \cdot 0,01 + 0,40 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,12 = 0,0645$

b) $P(S4|\overline{E}) = \dfrac{P(\overline{E}|S4)P(S4)}{P(\overline{E})} = \dfrac{0,35 \cdot 0,88}{1 - 0,0645} = 0,329$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Marzo 2018) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)*Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} kx- & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y+ & kz = & 2 \\ -x+ & y+ & z = & 2 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores de k.

b) Resúelvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resúelvase el sistema para $k = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -k^2+k+2 = 0 \Longrightarrow k = -1, \;\; k = 2$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $k = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array} \right| = 12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\left| \begin{array}{cc} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{array} \right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego el sistema es Incompatible.

Si $k = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Tenemos que : $|c_1c_2c_3| = |c_1c_3c_4| = |c_1c_2c_4| = |c_2c_3c_4| = 0$

$\left| \begin{array}{cc} -2 & 7 \\ -1 & 2 \end{array} \right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ el Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x- & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y+ & 2z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{3} - \lambda \\ \\ y = \lambda \\ \\ z = \dfrac{4}{3} \end{array} \right.$$

c) Si $k = 0$ el sistema es compatible determinado:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} - & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y & = & 2 \\ -x+ & y+ & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 12 \\ y = 4 \\ z = 10 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Un pintor necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de 480 m^2. Puede comprar la pintura a dos proveedores, A y B. El proveedor A le ofrece una pintura con un rendimiento de 6m^2 por kg y un precio de 1 euro por kg. La pintura del proveedor B tiene un precio de 1,2 euros por kg y un rendimiento de 8 m^2 por kg. Ningún proveedor le puede proporcionar más de 75 kg y el presupuesto máximo del pintor es de 120 euros. Calcúlese la cantidad de pintura que el pintor tiene que comprar a cada proveedor para obtener el mínimo coste. Calcúlese dicho coste mínimo.

Solución:

LLamamos x al número de kg de pintura comprados al proveedor A y, llamamos y al número de kg de pintura comprados al proveedor B.

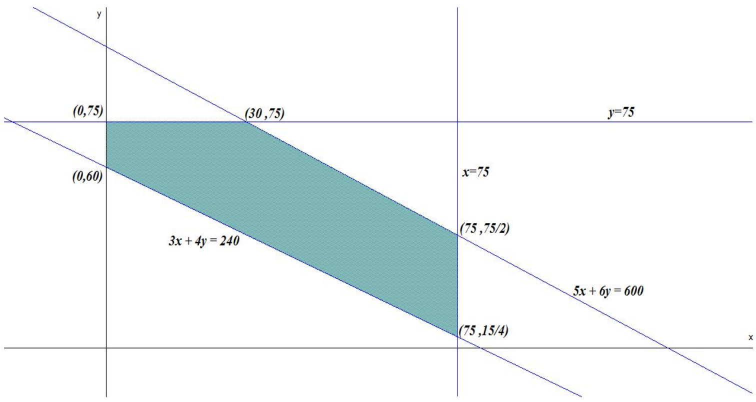
Proveedor	Rendimiento	Precio
A	6	1
B	8	$1,2$

Función Objetivo: Mín $z(x, y) = x + 1,2y$

Sujeto a:

$$\left\{\begin{array}{l} 6x + 8y \geq 480 \\ x + 1,2y \leq 120 \\ x \leq 75 \\ y \leq 75 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x + 4y \geq 240 \\ 5x + 6y \leq 600 \\ x \leq 75 \\ y \leq 75 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right.$$

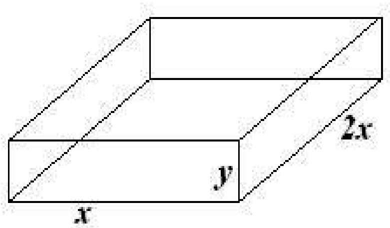
Tenemos:



$$\left\{\begin{array}{l} z(0, 75) = 90 \\ z(0, 60) = 72 \\ z(30, 75) = 120 \\ z(75, 75/2) = 120 \\ z(75, 15/4) = 79,5 \end{array}\right.$$

El mínimo coste, de 72 euros, corresponde a la compra de 0 kg del proveedor A y 60 kg del proveedor B.

Problema 3 *(2 puntos)* Una empresa de productos de limpieza fabrica cajas de cartón con tapa, para comercializar un determinado tipo de detergente. Las cajas son prismas rectos de 9000 cm^3 de volumen y base rectangular de largo igual al doble de su anchura. Calcúlense las dimensiones en centímetros (largo, anchura, altura) que ha de tener cada caja para que la superficie de cartón empleada en su fabricación sea mínima.
Solución:



$$V = 2x^2y = 9000 \Longrightarrow y = \frac{4500}{x^2}$$

$$S(x, y) = 4x^2 + 6xy \Longrightarrow S(x) = 4x^2 + \frac{27000}{x} = \frac{4x^3 + 27000}{x}$$

$$S'(x) = \frac{8x^3 - 27000}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 15$$

Comprobamos que es un mínimo por la segunda derivada

$$S''(x) = \frac{8(x^3 + 6750)}{x^3} \Longrightarrow S''(15) = 24 > 0$$

Luego se trata de un mínimo en $x = 15$. Las cajas tendrán de dimensiones: $15\,cm$ de ancho, $30\,cm$ de largo y $20\,cm$ de alto.

Problema 4 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$.

a) Calcúlese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y por las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = 1$ y $x = 3$. Tendremos dos áreas S_1 con un intervalo de integración $[0, 1]$ y otro S_2 con un intervalo de integración $[1, 3]$.

$$S_1 = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$S_1 = \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Big]_1^3 = -\frac{8}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}\ u^2$$

b) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$

	$(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3})$	$(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3})$	$(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

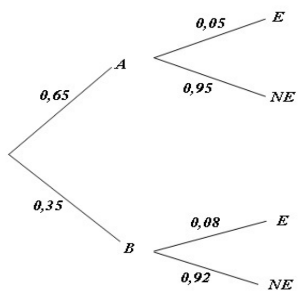
La función es creciente en el intervalo $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, \infty\right)$ y decreciente en $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$.

Problema 5 *(2 puntos)* Para efectuar cierto diagnóstico, un hospital dispone de dos escáneres, a los que denotamos como A y B. El 65 % de las pruebas de diagnóstico que se llevan a cabo en ese hospital se realizan usando el escáner A, el resto con el B. Se sabe además que el diagnóstico efectuado usando el escáner A es erróneo en un 5 % de los casos, mientras que el diagnóstico efectuado usando el escáner B es erróneo en un 8 % de los casos. Calcúlese la probabilidad de que:

a) El diagnóstico de esa prueba efectuado a un paciente en ese hospital sea erróneo.

b) El diagnóstico se haya efectuado usando el escáner A, sabiendo que ha resultado erróneo.

Solución:



a)

$$P(E) = 0,65 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,08 = 0,0605$$

b)

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)} = \frac{0{,}05 \cdot 0,65}{0,0605} = 0,5372$$