Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria 2018) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese la matriz $[(A \cdot A^t)^2 - 2A \cdot A^t]^{11}$.

b) Determínense el número de filas y columnas de la matriz X que verifica que $X \cdot A^t = B^t$. Justifíquese si A^t es una matriz invertible y calcúlese la matriz X.

Nota: M^t denota la matriz traspuesta de la matriz M.

Solución:

a) $[(A{\cdot}A^t)^2 - 2A{\cdot}A^t]^{11} = \left[\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^2 - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{11} =$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{matrix} X & \cdot & A^t & = & B^t \\ a \times b & & 2 \times 3 & & 1 \times 3 \end{matrix} \Longrightarrow a = 1$ y $b = 2$, luego el grado de X es 1×2.
La matriz A^t no es invertible ya que no es cuadrada.
$(p,q) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (3,2,3) \Longrightarrow (q,p,q) = (3,2,3) \Longrightarrow p = 2$ y $q = 3 \Longrightarrow X = (2,3)$

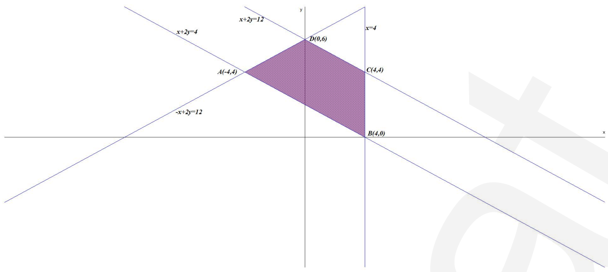
Problema 2 *(2 puntos)* Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ x + 2y \geq 4, \ x + 2y \leq 12, \ x \leq 4, \ -x + 2y \leq 12\right\}.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínense los puntos en los que la función $f(x,y) = 3x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de f en dichos puntos.

Solución:



a) $S: \begin{cases} x + 2y \geq 4 \\ x + 2y \leq 12 \\ x \leq 4 \\ -x + 2y \leq 12 \end{cases}$ La región S y los vértices a estudiar serán: $A(-4,4)$, $B(4,0)$, $C(4,4)$, y $D(0,6)$

b) $f(x,y) = 3x - y$

$$\begin{cases} f(-4,4) = -16 \text{ Mínimo} \\ f(4,0) = 12 \text{ Máximo} \\ f(4,4) = 8 \\ f(0,6) = -6 \end{cases}$$

El máximo es 12 y se alcanza en el punto $B(4,0)$, mientras que el mínimo se alcanza en el punto $A(-4,4)$ con un valor de -16.

Problema 3 *(2 puntos)* Considérese la función real de variable real: $f(x) = \dfrac{x}{1-4x^2}$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Estúdiense las asíntotas de f.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1/2\}$ y $f'(x) = \dfrac{4x^2+1}{(1-4x^2)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ la función no tiene extremos y $f'(x) > 0$ en todo el dominio de la función, luego la función es creciente en $\mathbb{R} - \{\pm 1/2\}$.

b) Asíntotas:

- Verticales: $x = -1/2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow(-1/2)^-} \dfrac{x}{1-4x^2} = \left[\dfrac{-1/2}{0^-}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow(-1/2)^+} \dfrac{x}{1-4x^2} = \left[\dfrac{-1/2}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

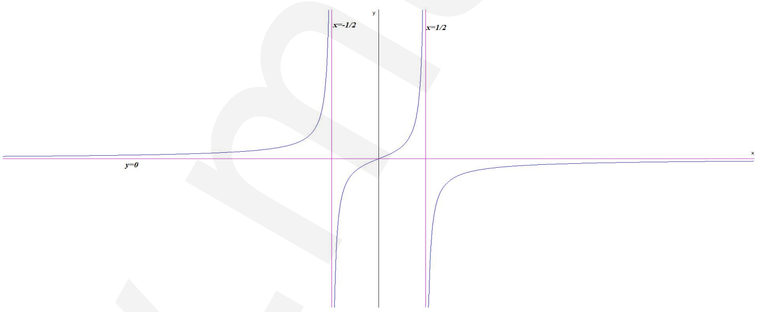
En $x = 1/2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow(1/2)^-} \dfrac{x}{1-4x^2} = \left[\dfrac{1/2}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow(1/2)^+} \dfrac{x}{1-4x^2} = \left[\dfrac{1/2}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x}{1-4x^2} = 0$$

- Oblícuas: No hay al haber horizontales.



Problema 4 *(2 puntos)* Se va a celebrar una carrera popular. Entre los participantes, dos de cada tres hombres y tres de cada cuatro mujeres han entrenado para la carrera.

a) Se eligen al azar y de forma independiente un hombre y una mujer de entre los participantes. Calcúlese la probabilidad de que alguno de ellos haya entrenado para la carrera.

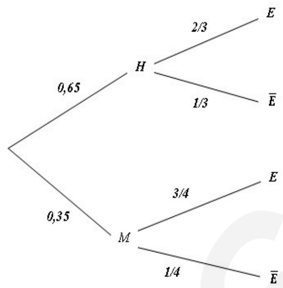
b) Si el 65 % de los participantes son hombres y el 35 % mujeres y se elige un participante al azar, calcúlese la probabilidad de que sea hombre sabiendo que ha entrenado para la carrera.

Solución:

H : Hombre, M : Mujer, E : Entrena y $\overline{E}$: no entrena.

a) $P(E \text{ alguno}) = P(E|H) \cdot P(\overline{E}|M) + P(\overline{E}|H) \cdot P(E|M) + P(E|H) \cdot P(E|M) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{12} = 0,917$

b) $P(H|E) = \dfrac{P(H \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,65 \cdot 2/3}{0,65 \cdot 2/3 + 0,35 \cdot 3/4} = 0,62275$



Problema 5 *(2 puntos)* La distancia anual, en kilómetros (km), que recorren las furgonetas de una empresa de reparto, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica $\sigma = 24000$ km.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que la amplitud del intervalo de confianza al 95 % para μ sea a lo sumo de 23 550 km. .

b) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 furgonetas. Suponiendo que $\mu = 150000$ km, calcúlese la probabilidad de que la distancia media anual observada, $\overline{X}$, esté entre 144240 km y 153840 km.

Solución:

a) Amplitud$= 23550 \Longrightarrow E = 11775$, $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 11775 = 1,96\frac{24000}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$$

$$n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 24000}{11775}\right)^2 = 15,959 \Longrightarrow n = 16$$

b) $n = 25$, $\mu = 150000 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(150000; 4800)$

$P(144240 \leq \overline{X} \leq 153840) = P\left(\frac{144240 - 150000}{4800} \leq Z \leq \frac{153840 - 150000}{4800}\right) = P(-1,2 \leq Z \leq 0,8) = P(Z \leq 0,8) - P(Z \leq -1,2) = 0,7881 - (1 - 0,8849) = 0,673$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria 2018) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 3y + z &= a \\ 2x + ay - 6z &= 8 \\ x - 3y - 5z &= 4 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) Resuélvase para $a = 4$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & a \\ 2 & a & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right); \quad |A| = -6a - 12 = 0 \Longrightarrow a = -2$$

- Si $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & -8 & 12 \\ 0 & -6 & -6 & 6 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 4F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & -8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $a = 4$:

$$\begin{cases} x + 3y + z &= 4 \\ 2x + 4y - 6z &= 8 \\ x - 3y - 5z &= 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

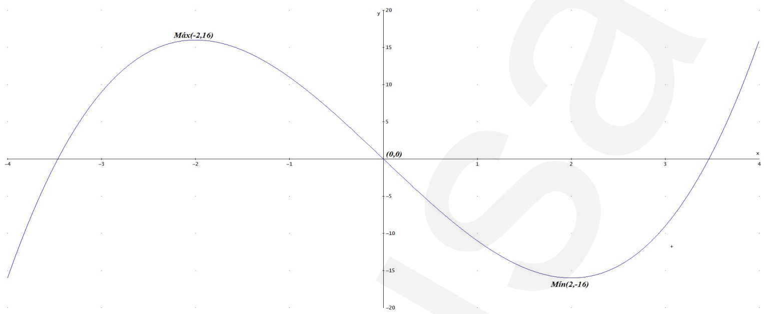
Problema 2 *(2 puntos)* Los beneficios, en millones de euros, de una determinada inversión vienen dados por la función $f(x) = x^3 - 12x$, donde x representa cierto índice que puede tomar cualquier valor real.

a) Determínese, en el caso de que exista, el valor del índice para el que el beneficio es mayor que el de todos los valores de un entorno suyo. ¿Cuál sería el beneficio para ese valor del índice?

b) Supóngase que el valor actual del índice es $x = 4$ y que está previsto que éste experimente un incremento positivo. Justifíquese si el beneficio aumentará o disminuirá.

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$ y $f''(x) = 6x$ por el método de la segunda derivada en $x = 2 \Longrightarrow f''(2) = 12 > 0 \Longrightarrow$ hay un mínimo, y en $x = -2 \Longrightarrow f''(-2) = -12 > 0 \Longrightarrow$ hay un máximo, con $f(-2) = -8 + 24 = 16$ millones de euros, siempre y cuando la variable x pueda tener valores negativos.



b) La función f es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, luego para valores superiores a $x = 2$ los beneficios irán creciendo.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{2}{3+x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Determínense el dominio de $f(x)$ y estúdiese su continuidad.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^-} (x^3 + 2e^x) = 2 \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{2}{3+x} = 2/3 \end{cases}$$

Luego la función es discontinua no evitable en $x = 0$, en ese punto hay un salto. f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x^3+2e^x)\,dx = \frac{x^4}{4}+2e^x\Big]_{-1}^{0} = \frac{7}{4}-\frac{2}{e} \simeq 1,014$

Problema 4 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A)=0,4$, $P(B)=0,6$ y $P(A\cup B)=0,8$. Calcúlese:

a) $P(\overline{A}\cap B)$.

b) $P(\overline{A\cup B}|A)$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Longrightarrow P(A\cap B)=0,4+0,6-0,8=0,2$
$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0,6-0,2=0,4$

b) $P(\overline{A\cup B}|A)=\dfrac{P(\overline{A\cup B}\cap A)}{P(A)}=\dfrac{P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap A)}{P(A)}=\dfrac{P(\phi)}{P(A)}=0$

Problema 5 *(2 puntos)* Una empresa quiere lanzar un producto al mercado. Por ello desea estimar la proporción de individuos, P, que estarían dispuestos a comprarlo.

a) Asumiendo que la proporción poblacional es $P=0,5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 3 % (±3 %).

b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 individuos de los cuales 90 afirmaron que comprarían el producto. Obténgase un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de individuos que estarían dispuestos a comprar el producto.

Solución:

a) $E=0,03$, $p=0,5$, $q=0,5$ y $z_{\alpha/2}=1,96$

$$E=z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96}{0,03}\right)^2 (0,5\cdot 0,5)=1067,11$$

Luego $n=1068$.

b) $n=450$, $z_{\alpha/2}=1,645$ y $p=\dfrac{90}{450}=0,2 \Longrightarrow q=0,8$.

$$E=z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}=1,645\sqrt{\frac{0,2\cdot 0,8}{450}}=0,031$$

$IC=(\overline{X}-E,\overline{X}+E)=(0,2-0,031;0,2+0,031)=(0,169;0,231)=(16,9\,\%;23,1\,\%)$