

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)

Febrero 2018

Problema 1 (2 puntos) Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Estudíese la continuidad y derivabilidad de la función.
- b) Determinénse los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ es $m = -2$. Calcúlese, para cada valor de a obtenido, la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$.

Solución:

- a) Continuidad en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 3x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Luego la función es continua en $x = 0$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ -2x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(0^-) = 2 \\ f'(0^+) = 3 \end{cases}$$

Luego f no es derivable en $x = 0 \implies f$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

- b) En $x = a$ es $m = f'(a) = -2$, hay dos casos:

- Si $x < 0$: $f'(a) = 2a + 2 = -2 \implies a = -2$
 $b = f(-2) = 0 \implies y = -2(x + 2)$
- Si $x \geq 0$: $f'(a) = -2a + 3 = -2 \implies a = 5/2$
 $b = f(5/2) = \frac{5}{4} \implies y - \frac{5}{4} = -2(x - \frac{5}{2})$

Problema 2 (3 puntos) Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9}$$

- a) Calcúlense sus asíntotas.
- b) Determinénse los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

- a) Asíntotas:

■ **Verticales:**

$$x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} = \left[\frac{6}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} = \left[\frac{6}{0^+} \right] = +\infty$$

$$x = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} = \left[\frac{6}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} = \left[\frac{6}{0^-} \right] = -\infty$$

■ **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} = 1$$

■ **Oblicuas:** No hay por haber horizontales

- b)

$$f'(x) = -\frac{12x}{(x^2 - 9)^2} = 0 \implies x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0, 3) \cup (3, \infty)$.

La función tiene un máximo en $(0, 1/3)$.

Problema 3 (3 puntos) Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{ax + b}{\sqrt{x^3 + 1}} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x^3 + 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Determinéense los valores que deben tomar los parámetros a y b para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y $x = 2$.
- b) Calcúlese, para $a = 4$ y $b = -2$, el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

- a) Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b}{x} = a + b \end{cases} \implies a + b = 2$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax + b}{x} = \frac{2a + b}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^3 + 1} = 3 \end{cases} \implies 2a + b = 6$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \end{cases}$$

- b)

$$S_1 = \int_1^2 \frac{4x - 2}{x} dx = \int_1^2 \left(4 - \frac{2}{x} \right) dx = 4x - 2 \ln |x| \Big|_1^2 = 4 - 2 \ln 2$$

$$S = |S_1| = 4 - 2 \ln 2 = 2,614 \text{ u}^2$$

Problema 4 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 4x^3 - ax^2 - ax + 2$, $a \in \mathbb{R}$.

- a) Determinése el valor del parámetro real a para que la función alcance un extremo relativo en $x = 1/2$. Compruébese que se trata de un mínimo.
- b) Para $a = 2$, calcúlese el valor de $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 12x^2 - 2ax - a$:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - a - a = 0 \implies a = \frac{3}{2}$$

$$f''(x) = 24x^2 - 2a = 24x - 3:$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 12 - 3 = 9 > 0 \implies x = \frac{1}{2} \text{ Mínimo}$$

b)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (4x^3 - 2x^2 - 2x + 2) dx = \left[x^4 - \frac{2x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}$$