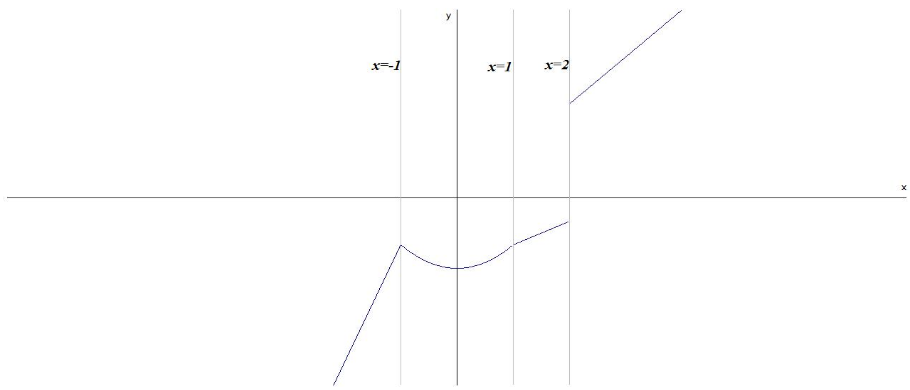
Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2018

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 5x+3 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 - 3 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \\ x - 3 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - 2bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 - 2ax + 3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2ax^2 - bx + 1) = 2a - 2b + 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+}(bx^2 - 2ax + 3) = b - 2a + 3$$

$$2a - 2b + 1 = b - 2a + 3 \Longrightarrow 4a - 3b = 2$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 4ax - 2b & \text{si} & x < 1 \\ 2bx - 2a & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$$

$$f'(1^-) = 4a - 2b;\ \ f'(1^+) = 2b - 2a \Longrightarrow 4a - 2b = 2b - 2a \Longrightarrow 3a - 2b = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4a - 3b = 2 \\ 3a - 2b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -4 \\ b = -6 \end{array} \right.$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lcc} \frac{ax-3b}{3} & \text{si} & x < -1 \\ bx - 1 & \text{si} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{2ax-b}{2} & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{ax-3b}{3} = \dfrac{-a-3b}{3} \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} (bx - 1) = -b - 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{-a-3b}{3} = -b-1 \Longrightarrow a = 3$$

Continuidad en $x = 1$:

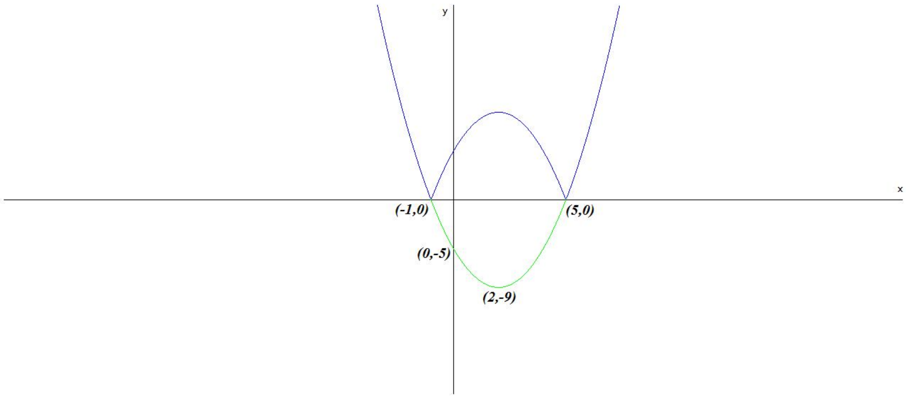
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} (bx - 1) = b - 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{2ax-b}{2} = \dfrac{2a-b}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{2a-b}{2} = b-1 \Longrightarrow 2a-3b = -2$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a = 3 \\ 2a - 3b = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 8/3 \end{array} \right.$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$ y representarla gráficamente.

Solución:
Hacemos $g(x) = x^2 - x - 6 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$:

x	y
0	-5
5	0
-1	0
2	-9



$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(1/2) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(2, -9)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(2, 9)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{si} \quad x \le -1 \\ -(x^2 - 4x - 5) & \text{si} \quad -1 < x \le 5 \\ x^2 - 4x - 5 & \text{si} \quad 5 \le x \end{cases}$$

Continuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} (x^2 - 4x - 5) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} (-x^2 + 4x + 5) = 0$$

$$f(-1) = 0$$

Y f es continua en $x = 5$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^-} (-x^2 + 4x + 5) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^+} (x^2 - 4x - 5) = 0$$

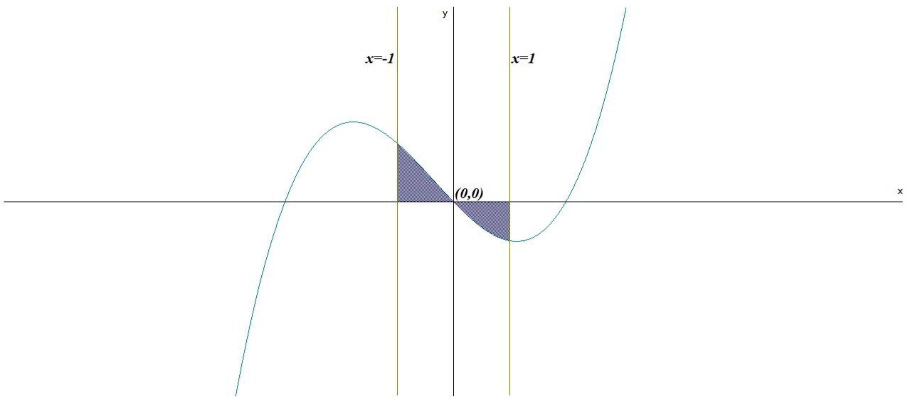
$$f(5) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si} \quad x \le -1 \\ -2x + 4 & \text{si} \quad -1 < x \le 5 \\ 2x - 4 & \text{si} \quad 5 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -1$: $f'(-1^-) = -6$ y $f'(-1^+) = 6$, luego no es derivable en $x = -1$.
Derivabilidad en $x = 5$: $f'(5^-) = -6$ y $f'(5^+) = 6$, luego no es derivable en $x = 5$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{-1, 5\}$.

Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$, encontrar el área encerrada por ella, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
Solución:



$$x^3 + x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = -3 \text{ y } x = 2$$

Tendremos dos áreas a calcular S_1 con los límites de integración entre -1 y 0, y otra S_2 entre 0 y 1.

$$F(x) = \int (x^3 + x^2 - 6x)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3x^2$$

$$S_1 = \int_{-1}^{2} f(x)\, dx = F(0) - F(-1) = \frac{37}{12}, \ \ S_2 = \int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0) = -\frac{29}{12}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{37}{12} + \frac{29}{12} = \frac{11}{2}\ u^2$$