

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)
Noviembre 2017

Problema 1 (2 puntos) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$

- (1 punto) Determinése para qué valores de a para los que la matriz A es invertible..
- (1 punto) Para $a = 1$, despégese y determinése la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X = A + 2Id$, donde Id representa la matriz identidad de orden 3.

(Modelo 2018 - Opción A)

Solución:

- $|A| = 2a^3 = 0 \implies a = 0$ La matriz será invertible para cualquier valor de $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- Para $a = 1$: $A \cdot X = A + 2Id \implies X = A^{-1}(A + Id)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad A + 2Id = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2 (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ 5x + 3y + az = a + 4 \end{cases}$$

- (1,5 puntos) Discútase en función de los valores del parámetro a .
- (0,5 puntos) Resuélvase para $a = 1$.

(Modelo 2018 - Opción B)

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & a & a+4 \end{array} \right); \quad |A| = 3 - a = 0 \implies a = 3$$

▪ Si $a \neq 3 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

▪ Si $a = 3$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 7 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

2. Si $a = 1$:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ 5x + 3y + z = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 3 (1 punto) Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (0,5 puntos) Determinése la matriz C^{40} .

2. (0,5 puntos) Calcúlese la matriz X que verifica $X \cdot A + 3B = C$

(Septiembre 2017 - Opción B)

Solución:

1. $C^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.
 $C^{40} = (C^2)^{20} = I^{20} = I$

2. $XA + 3B = C \implies XA = C - 3B \implies X = (C - 3B)A^{-1}$:

$$C - 3B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$