Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2018

Problema 1 *(4 puntos)*. Sean las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-y-z=3\\ x-y+2z=0\end{array}\right. \quad , \quad s:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1},$$

se pide:

a) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y calcular la distancia que las separa, el el caso de que crucen.

b) Encontrar una recta vertical a ambas que pase por el punto $P(1,-2,1)$

c) Encontrar una recta vertical a ambas y que las corte.

d) Encontrar una recta que pasando por el punto $P(1,-2,1)$ corte a ambas.

e) Encontrar los puntos de s que distan 5 unidades de $P(1,-2,1)$.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,1,0)\\ P_r(2,0,-1)\end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(2,1,-1)\\ P_s(1,0,0)\end{array}\right. \quad , \quad \overrightarrow{P_sP_r}=(1,0,-1)$$

a)

$$\left[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \text{se cortan}$$

$$|\overrightarrow{u_t}|=|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\left|\begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{array}\right||=|(-1,1,-1)|=\sqrt{3}$$

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{0}{\sqrt{3}}=0\ u$$

b)

$$t:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(-1,1,-1)\\ P(1,-2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l} x=1-\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=1-\lambda\end{array}\right.$$

c)

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1,1,-1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,0) \\ P_r(2,0,-1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-2 \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 0 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x-y-2z-4=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1,1,-1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,1,-1) \\ P_s(1,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} -1 & 2 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ -1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow y+z=0$$

$$t : \begin{cases} x-y-2z-4=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

d)

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_r} = (1,2,-2) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,0) \\ P_r(2,0,-1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-2 \\ 2 & 1 & y \\ -2 & 0 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x-2y-z-5=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_s} = (0,2,-1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,1,-1) \\ P_s(1,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y \\ -1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x+2y+4z-1=0$$

$$l : \begin{cases} 2x-2y-z-5=0 \\ x+2y+4z-1=0 \end{cases}$$

e)

$$s : \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Longrightarrow \text{llamamos } P_s(x,y,z) \in s$$

$$d(P,s) = |\overrightarrow{P_sP}| = \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2} = 5 \Longrightarrow$$

$$(2\lambda)^2 + (\lambda+2)^2 + (-\lambda-1)^2 = 25 \Longrightarrow 3\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2,39 \Longrightarrow P_1(-3,78; -2,39; 2,39) \\ \lambda_2 = 1,39 \Longrightarrow P_2(3,78; 1,39; -1,39) \end{cases}$$

Problema 2 *(1 puntos).* Se pide:

a) Dados los puntos $P_1(-1,3,0)$ y $P_2(3,1,2)$ encontrar el plano mediador.

b) Dados los planos $\pi_1 : 2x-3y+z+1=0$ y $\pi_2 : x+2y-3z-2=0$ encontrar los planos bisectores.

Solución:

a)

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2+(z-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2} \Longrightarrow$$

$$\pi : 2x - y + z - 1 = 0$$

b)

$$\frac{|2x-3y+z+1|}{\sqrt{14}} = \frac{|x+2y-3z-2|}{\sqrt{14}} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi : x - 5y + 4z + 3 = 0 \\ \pi' : 3x - y - 2z - 1 = 0 \end{array} \right.$$