Examen de Matemáticas II-Coincidente (Junio 2018) Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular A^tA y AA^t, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

b) (1,25 puntos) Hallar A^{-1} y resolver el sistema lineal $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) (0,75 puntos) Calcular C^2, donde $C = ABA^t$.

Solución:

a) $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow AA^t = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I$ y

$$A^tA = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I$$

b) $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$.

c) $C = ABA^t = A2IA^t = 2AA^t = 2I = B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow C^2 = 2I2I = 4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = 3x^2e^{-x}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx$.

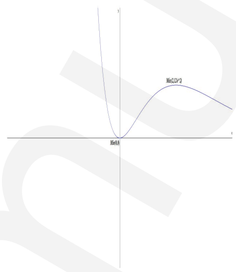
c) (0,75 puntos) Calcular los límites: $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$.

Solución:

a) $f'(x) = 3xe^{-x}(2-x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)\cup(2, \infty)$ y creciente en $(0, 2)$. Tiene un mínimo en el punto $(0, 0)$ y un máximo en el $(2, 12/e^2)$.



b) $$F(x) = \int \frac{f(x)}{x}\,dx = \int 3xe^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = 3x \Longrightarrow du = 3dx \\ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right] =$$
$$-3xe^{-x} + 3\int e^{-x}\,dx = -3xe^{-x} - 3e^{-x} = -3e^{-x}(x+1)$$

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx = F(1) - F(0) = \frac{-6+3e}{e} \simeq 0,793$$

c) $$\lim_{x\longrightarrow -\infty}(3x^2e^{-x}) = \lim_{t\longrightarrow +\infty}(3t^2e^{t}) = \infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow \infty}(3x^2e^{-x}) = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{3x^2}{e^x} = 0$$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Se consideran los puntos $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 0, 1)$, $R(0, 0, 1)$ y la recta r que pasa por los puntos $A(0, 0, -1)$ y $B(0, 1, 0)$. Se pide:

a) (1 punto) Encontrar el punto de intersección de r con el plano que contiene a P, Q y R.

b) (0,75 puntos) Hallar un punto T de r, tal que los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PT}$ sean linealmente dependientes.

c) (0,75 puntos) Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son $O(0;0;0)$ y los puntos P, Q, R.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AB}=(0,1,1)\\ P_r=B(0,1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=1+\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

a) $$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(0,1,0)\\ \overrightarrow{RP}=(1,1,0)\\ R(0,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}0&1&x\\1&1&y\\0&0&z-1\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi: z-1=0$$

El punto de corte de r con π: $0+0+\lambda-1=0 \Longrightarrow \lambda=1 \Longrightarrow (0,2,1)$

b) $T(0,1+\lambda,\lambda)$, $\overrightarrow{PQ}=(0,-1,0)$, $\overrightarrow{PR}=(-1,-1,0)$ y $\overrightarrow{PT}=(0,1+\lambda,\lambda)-(1,1,1)=(-1,\lambda,\lambda-1)$:

$$\left|\begin{array}{ccc}0&-1&0\\-1&-1&0\\-1&\lambda&\lambda-1\end{array}\right|=-\lambda+1=0 \Longrightarrow \lambda=1$$

Si $\lambda=1$ los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PT}$ son linealmeente dependientes, luego $T(0,2,1)$.

c) $\overrightarrow{OP}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{OQ}=(1,0,1)$ y $\overrightarrow{OR}=(0,0,1)$:

$$V=\frac{1}{6}|\left|\begin{array}{ccc}1&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{array}\right||=\frac{1}{6}|-1|=\frac{1}{6}\ u^3$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* La directiva de un club de cine ha hecho un estudio sobre los gustos cinematográficos de sus socios. De los 300 socios del club, hay 150 a los que les gustan las películas de acción, 135 a los que les gustan las películas de suspense y 75 a los que no les gustan ninguno de esos géneros cinematográficos. Si se elige un socio cualquiera, calcular las probabilidades de que:

a) (0,25 puntos) No le gusten las películas de acción.

b) (0,75 puntos) Le guste al menos uno de los dos géneros mencionados.

c) (0,75 puntos) Le guste el cine de acción y el de suspense.

d) (0,75 puntos) Le gusten las películas de acción, pero no las de suspense.

Solución:
A : le gusta las de acción y S : le gusta las de suspense. $P(A) = \dfrac{150}{300} = \dfrac{1}{2} = 0,5$, $P(S) = \dfrac{135}{300} = \dfrac{9}{20} = 0,45$ y $P(\overline{A} \cap \overline{S}) = \dfrac{75}{300} = \dfrac{1}{4} = 0,25$

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} = 0,5.$

b) $P(A \cup S) = 1 - P(\overline{A \cup S}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{S}) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} = 0,75.$

c) $P(A \cap S) = P(A) + P(S) - P(A \cup S) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{20} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{5} = 0,2.$

d) $P(A \cap \overline{S}) = P(A) - P(A \cap S) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{10} = 0,3$

Examen de Matemáticas II-Coincidente (Junio 2018) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$A = \left\{ \begin{array}{rrrr} 10x- & 20y- & 10z = & 8\alpha + 44 \\ 2x- & 5y+ & 3z = & 4\alpha + 4 \\ 3x- & 7y+ & 2z = & 5\alpha + 9 \end{array} \right. ,$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real α.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $\alpha = -3$.

Solución:

a) Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} 10 & -20 & -10 & 8\alpha + 44 \\ 2 & -5 & 3 & 4\alpha + 4 \\ 3 & -7 & 2 & 5\alpha + 9 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ -5F_2 + F_1 \\ 10F_3 - 3F_1 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 10 & -20 & -10 & 8\alpha + 44 \\ 0 & 5 & -25 & -12\alpha + 24 \\ 0 & -10 & 50 & 2\alpha + 6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|c} 10 & -20 & -10 & 8\alpha + 44 \\ 0 & 5 & -25 & -12\alpha + 24 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha + 6 \end{array} \right)$$

Si $2\alpha + 6 = 0 \Longrightarrow \alpha = -3 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado y si $\alpha \neq -3 \Longrightarrow$ sistema incompatible.

b) Si $\alpha = -3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y - z = 2 \\ y - 5z = 12 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 26 + 11\lambda \\ y = 12 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Una firma de alta perfumería pretende sacar al mercado un frasco de un perfume exclusivo que contenga 12 ml de esencia pura más una cantidad variable, x, de alcohol. El precio de la esencia pura es de 48 euros el mililitro. Al añadir alcohol a la esencia, el precio de la mezcla resultante disminuye. Sabiendo que por cada mililitro de alcohol añadido el precio del mililitro de mezcla se reduce 3 euros, se pide:

a) (0,25 puntos) Determinar el precio del frasco de perfume en el caso $x = 0$ (el frasco sólo contiene los 12 ml de esencia).

b) (0,5 puntos) Expresar en función de x el precio del frasco que contiene $(12 + x)$ ml de mezcla.

c) (0,5 puntos) Deducir con qué valor de x el precio de la mezcla se hace cero.

d) (1,25 puntos) Sin tener en cuenta otros costes, determinar el valor de x para el que se obtiene el frasco de perfume (mezcla) de precio máximo. Indicar en este caso la capacidad del frasco y el precio resultante.

Solución:

a) para $x = 0$ el precio sería: $12 \cdot 48 = 576$ euros.

b) $f(x) = (12 + x)(48 - 3x) = -3x^2 + 12x + 576$.

c) $f(x) = (12 + x)(48 - 3x) = 0 \Longrightarrow x = -12$ (no válida) y $x = 16$ mililitros.

d) $f'(x) = -6x + 12 = 0 \Longrightarrow x = 2$ por la segunda derivada $f''(x) = -6 \Longrightarrow f''(2) = -6 < 0 \Longrightarrow x = 2$ es un máximo y el valor de la función en este punto es $f(2) = 14 \cdot 42 = 588$ euros.

Problema 3 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$, $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} -x + y + 2z + 4 = 0 \\ -x + 2y + 3z + 5 = 0 \end{array} \right.$ y el punto $P(-1, 2, -1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de las rectas r y s.

b) (0,75 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que pasa por P y es paralelo a r y a s.

c) (0,75 puntos) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices el origen de coordenadas, el punto P y el punto P' proyección de P sobre el plano $z = 0$.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (0, 2, -1) \\ P_r(-2, -3, 0) \end{cases} \text{ y } s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ P_s(3, -1, 0) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (5, 2, 0) \Longrightarrow \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ las rectas r y s se cruzan.

b) $\overrightarrow{u_\pi} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -2)$ como $P \in \pi \Longrightarrow x - y - 2z + \lambda = 0 \Longrightarrow -1 - 2 + 2 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow \pi : x - y - 2z + 1 = 0$

c) Calculo de P' proyección de P sobre $\pi' : z = 0$:

- Calculamos una recta $t \perp \pi'/P \in t$:
$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0, 0, 1) \\ P_t = P(-1, 2, -1) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$
- calculamos P' punto de corte de t con π': $-1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P'(-1, 2, 0)$

$\overrightarrow{OP} = (-1, 2, -1)$ y $\overrightarrow{OP'} = (-1, 2, 0)$

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(2, 1, 0)| = \frac{\sqrt{5}}{2}\ u^2$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Sean A y B dos sucesos independientes de un experimento aleatorio, cuyas probabilidades son $P(A) = 0,6$ y $P(B) = 0,2$. Calcule las siguientes probabilidades:

$$P(A \cup B), \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}), \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}), \quad P(\overline{A} \cap B), \quad P(\overline{A}|B)$$

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario de S.

Solución:

Tenemos $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,2$ y por ser A y B independientes $P(A \cap B) = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12$.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,2 - 0,12 = 0,68$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,12 = 0,88$

- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,68 = 0,32$
- $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,12 = 0,08$
- $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,08}{0,2} = 0,4$